Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg

Studiengang Diplom-Mathematik

DIPLOMARBEIT

Gewichtete Normungleichungen für Operatoren zwischen Räumen Bochner-integrierbarer Funktionen

vorgelegt von: Ingo Bartels

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Andreas Defant

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Michael Langenbruch

Oldenburg, den 27. März 1997

Einleitung

Zu vielen stetigen, linearen Operatoren $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ gibt es zu festem $1 \leq r < \infty$ positive, nichttriviale Gewichte $u, w \geq 0$, so daß T der gewichteten Normungleichung

$$\int_\Omega |Tf|^r u dr \ \leq \ \int_O |f|^r w d\mu \tag{1}$$

genügt. Ungleichungen dieses Typs für *spezielle* Operatoren werden beispielsweise in Gebieten der harmonischen Analysis, wie der A_p-Theorie, untersucht. Im allgemeinen ist es jedoch recht aufwendig, interessante gewichtete Normungleichungen für beliebige Operatoren zu beweisen. Andererseits erfüllen Operatoren $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ häufig auch die vektorwertige Ungleichung

$$\left\| (\sum_{i=1}^n |Tf_i|^r)^{1/r} \right\|_p \leq \ c \ \left\| (\sum_{i=1}^n |f_i|^r)^{1/r} \right\|_q \tag{2}$$

So haben zum Beispiel Marcinkiewicz und Zygmund gezeigt, daß für $1 \leq p, q < \infty$ und $r = 2$ jeder stetige, lineare Operator $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ der Ungleichung (2) genügt.
Ein Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß gewichtete und vektorwertige Ungleichungen in engem Zusammenhang stehen. Zentral wird dabei ein Satz des vierten Kapitels sein, demzufolge ein Operator T die Ungleichung (2) genau dann einhält, wenn er bestimmte Ungleichungen der Form (1) erfüllt. Sätze, wie der eben erwähnte von Marcinkiewicz und Zygmund, erlauben es somit, „automatisch" auf Ungleichungen des Typ (1) zu schließen. Auf diese Weise gewonnene, gewichtete Ungleichungen können dann für Anwendungen genutzt werden, wie im fünften Kapitel zu sehen sein wird.

Die Idee, von vektorwertigen Eigenschaften eines Operators auf gewichtete Stetigkeiten zu schließen, geht auf Stein und Nikishin zurück. Sie zeigten, daß ein im Maß stetiger Operator $T : L_p(\mu) \to L_o(\nu)$ bezüglich eines zu ν äquivalenten Maßes $wd\nu$ vom schwachen Typ (p, q) für $q := \min\{2, p\}$ und $1 \leq p < \infty$ ist. Der Beweis gliedert sich in zwei getrennte Schritte. Im ersten werden die Operatoren, für die die Aussage gilt, anhand von vektorwertigen Abschätzungen charakterisiert. Im zweiten Schritt wird dann ausgenutzt, daß $L_p(\mu)$ vom Typ q ist, um zu zeigen, daß jeder Operator die zuvor erarbeiteten, vektorwertigen Abschätzungen erfüllt. Eine ausführlichere Darstellung findet sich im zweiten Kapitel. Zuvor werden in einem einleitenden Kapitel Bezeichnugen und Räume sowie Eigenschaften von sublinearen Operatoren und Multiplikationsoperatoren zur Verfügung gestellt.

Ab dem dritten Kapitel wird dann das eingangs beschriebene Konzept in allgemeiner Form für Operatoren $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ behandelt: Zunächst werden im dritten Kapitel vektorwertige Ungleichungen der Form (2) untersucht. Neben einer Verallgemeinerung des erwähnten Ergebnisses von Marcinkiewicz und Zymund für Operatoren $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ werden auch im Fall $r \neq 2$ Verteilungen von p und q sowie Klassen von Banachräumen E und F vorgestellt, für die jeder Operator die Ungleichung (2) erfüllt.
Im vierten Kapitel wird dann gezeigt, wie von diesen vektorwertigen Ungleichungen auf gewichtete Normungleichungen geschlossen werden kann. Grundlegend werden hierbei eine vom Faktorisierungssatz von Maurey-Rosenthal bekannte Beweistechnik sowie Überlegungen von Garcia-Cuerva und Rubio de Francia sein. Das fünfte und letzte Kapitel präsentiert dann Anwendungen der zuvor bewiesenen Sätze. So wird ein Satz über die Zerlegung unbedingt summierbarer Folgen in $L_1([0, 1])$ aufgegriffen, neu bewiesen und verallgemeinert. Zudem wird eine gewichtete Normungleichung der Fouriertransformation gezeigt und die Fortsetzbarkeit translationsinvariater Operatoren untersucht.
Die in dem dritten, vierten und fünften Kapitel bewiesenen Resultate entstanden in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Andreas Defant. Sie stellen vielfach eine Verallgemeinerung schon länger bekannter Ergebnisse dar, auf die im letzten Abschitt „Bemerkungen und Ausblicke“ eines jeden Kapitels hingewiesen wird.

Zum Schluß möchte ich mich noch bei Dipl. Math. Henning Blohm für seine zügige Korrektur, bei Stefan Griep für die langen und ergiebigen Gespräche und bei Wiebke Steinwart für die mentale und häusliche Unterstützung besonders in den letzten, hektischen Wochen bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Bezeichnungen und Definitionen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Aussagen zusammengestellt, die in dieser Arbeit an vielen Stellen benötigt werden.
Im ersten Abschnitt werden dazu notwendige Bezeichnungen vorgestellt. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich dann mit einigen Räumen meßbarer Funktionen, inbesondere werden einige Lorentzräume und die Räume der $p-$Bochner-integrierbaren Funktionen präsentiert. Im dritten Abschnitt werden Eigenschaften sublinearer Operatoren vorgestellt. Neben dem vierten Abschnitt, in dem näher auf Multiplikationsoperatoren eingegangen wird, ist dabei der dritte der wichtigste Abschnitt dieses Kapitels. Im letzten Abschnitt werden schließlich Typ und Kotyp von Banachräumen definiert.

1.1 Bezeichnungen

Durchgehend bezeichnen $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(O, \mathcal{B}, \nu)$ in dieser Arbeit $\sigma-$endliche Maßräume. Mit λ beziehungweise λ^n wird das Lebesguemaß in $\mathbb{R}$, respektive $\mathbb{R}^n$ beschrieben. Zudem wird auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^+ :=]0, \infty[$ das Haarmaß $\frac{dt}{t}$ mit λ^+ bezeichnet. Analog beschreibt $\lambda_{\mathbb{T}}$ das normalisierte Haarmaß auf der Einheitssphäre $\mathbb{T}$ von $\mathbb{C}$. Ferner wird mit $S_{n-1}(r)$ die euklidische Sphäre des $\mathbb{R}^n$ mit Radius r beschrieben. Zudem ist ihr Oberflächenmaß $\lambda_{S_{n-1}(r)}$, und σ_{n-1} bezeichnet die „Oberfläche“ von $S_{n-1}(1)$.
Für $0 < p \leq \infty$ seien:

$$\mathcal{W}_p(\mu) := \{f \in L_p(\mu) \mid f \geq 0 \text{ und } \|f\|_p \leq 1\}$$

sowie

$$\mathcal{W}_p^1(\mu) := \{f \in L_p(\mu) \mid f \geq 0 \text{ und } \|f\|_p = 1 \} .$$

Elemente aus $\mathcal{W}_p(\mu)$ und $\mathcal{W}_p^1(\mu)$ werden im weiteren häufig auch *Gewichte* genannt.

Zu $1 \leq p \leq \infty$ wird mit p' der zu p konjugierte Exponent bezeichnet, das heißt $\frac{1}{p'} := 1 - \frac{1}{p}$.
Durchgehend wird in dieser Arbeit die in der Maßtheorie übliche Konvention $0 \cdot \left(\pm\frac{1}{0}\right) = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$ angewendet. Mit ihr bleibt die Distributivität für Elemente aus $[0, \infty]$ erhalten. Ferner hat das „Integral" für meßbare Abbildungen $f : \Omega \to [0, \infty]$ die „gewohnten" Eigenschaften. (vgl. dazu [1], §11, insbesondere 11.3, 11.6 sowie 15.2) Generell ist diese Konvention zur Behandlung von Integralen der Form $\int f g^{-1} d\mu$ für positive, meßbare Funktionen mit $\{f = 0\} \cap \{g = 0\} \neq \emptyset$ sehr nützlich. An einigen Stellen, wie dem Lemma von Ky Fan im vierten Kapitel, erfordert sie jedoch ein sorgfältiges Argumentieren.
Schließlich bezeichnen E und F immer Banachräume, es sei denn eine andere, in der Regel schwächere Forderung wird ausdrücklich angegeben.
Alle anderen, hier nicht aufgezählten Bezeichnungen folgen den üblichen Standards.

1.2 Spezielle Räume meßbarer Funktionen

Es werden nun die Räume meßbarer Funktionen vorgestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden. Neben den L_p-Räumen sind dies vor allem die Räume der $p-$Bochner-integrierbaren Funktionen und die Lorentzräume.

Die meßbaren, reellwertigen Funktionen über $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bilden einen Vektorraum, der im weiteren mit $\mathcal{L}_o(\mu)$ bezeichnet wird. Sein Quotient bezüglich der $\mu-$Nullfunktionen wird mit $L_o(\mu)$ bezeichnet. Sind $f_n, f \in L_o(\mu)$, so *konvergiert* die Folge (f_n) gegen f *im Maß*, falls es zu jeder integrierbaren Menge $A \in \mathcal{A}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\mu(A \cap \{|f_n| \geq \varepsilon\}) \ \leq \ \varepsilon$ für alle $n \geq n_o$ ist. Ist (A_n) eine disjunkte Zerlegung von Ω in integrierbare Mengen A_n und

$$d_o(f, g) \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \int\limits_{A_n} \min\{1, \ |f - g|\} \ d\mu$$

für $f, g \in L_o(\mu)$, so ist d_o eine translationsinvariante Metrik auf $L_o(\mu)$, die die Konvergenz im Maß beschreibt (vgl. [8], S.164ff). Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, daß d_o sogar vollständig ist. Setzt man nun für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\varepsilon, \delta > 0$:

$$U_{A,\varepsilon,\delta} := \{f \in L_o(\mu) \mid \mu(A \cap \{|f| \geq \delta\}) \ \leq \ \varepsilon\} \ ,$$

so bilden die $U_{A,\varepsilon,\delta}$ eine 0-Umgebungsbasis der Topologie von d_o. Durch Nachrechnen sieht man, daß diese sogar eine Vektorraumtopologie ist. Damit ist $L_o(\mu)$ ein vollständiger, metrisierbarer, topologischer Vektorraum. Für $0 \leq p \leq \infty$ sei ferner

$$L_p^{>0}(\mu) := \{f \in L_p(\mu) \mid f(x) > 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega\}$$

Analog ist $L_p^{\geq 0}(\mu)$ definiert.

Für $f \in L_o(\mu)$ und $0 < p < \infty$ seien

$$\|f\|_{p,\infty} := \inf\left\{K > 0 \mid \mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \left(\frac{K}{\alpha}\right)^p \text{ für alle } \alpha > 0\right\} \quad (1.1)$$

und

$$L_{p,\infty}(\mu) := \{f \in L_o(\mu) \mid \|f\|_{p,\infty} < \infty\} .$$

Man kann leicht zeigen, daß dann $L_{p,\infty}(\mu)$ ein quasinormierter Raum im Sinne von ([16], S. 162, 10.) mit $\|f+g\|_{p,\infty} \leq 2^{1+1/p}(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty})$ ist. Auf die gebräuchlichere, äquivalente Definition von $L_{p,\infty}(\mu)$ als Lorentzraum wird hier nur hingewiesen, da im weiteren lediglich die Ungleichung (1.1) benötigt wird.
Um die die Räume der p-Bochner-integrierbaren Funktionen einführen zu können, wird noch die folgende Definition benötigt:

Definition 1.1 *Eine Abbildung $f : \Omega \to E$ heißt* Treppenfunktion, *falls es integrierbare Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ und $x_1, \ldots, x_n \in E$ gibt, so daß gilt:*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i \ .$$

Eine Abbildung $f : \Omega \to E$ heißt (stark) meßbar, *falls es eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen gibt, so daß für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\|_E = 0 \ .$$

In diesem Fall ist auch die Abbildung $\omega \mapsto \|f(\omega)\|_E$ (im reellen Sinne) meßbar. (vgl. [7] S. 41f.) Eine meßbare Funktion $f : \Omega \to E$ heißt *Nullfunktion*, falls $\mu(\{\omega \in \Omega \mid \|f(w)\|_E \neq 0 \ \}) = 0$ ist. Für $0 < p < \infty$ sei nun

$$\mathcal{L}_p(\mu, E) := \{f : \Omega \to E \mid f \text{ stark meßbar und } \|f(.)\|_E \in \mathcal{L}_p(\mu) \ \} .$$

Es ist klar, daß $\mathcal{L}_p(\mu, E)$ ein Vektorraum ist. Der Quotient $\mathcal{L}_p(\mu, E)$ bezüglich der Nullfunktionen wird mit $L_p(\mu, E)$ bezeichnet. Durch

$$\|f\|_{L_p(\mu, E)} := \left(\int_\Omega \|f(x)\|_E^p \ \mu(dx)\right)^{1/p}$$

wird auf $L_p(\mu, E)$ eine Quasinorm definiert. Ganz analog wird $L_\infty(\mu, E)$ definiert. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L_p(\mu, E)$ dann sogar ein Banachraum (vgl. [7], S. 97f.). Das nächste Lemma, dessen Beweis in ([7], S. 97f.) und als Skizze in ([4], App. B12, S. 506) zu finden ist, zeigt zudem für $1 \leq p \leq \infty$, daß wie im skalarwertigen Fall jedes $f \in L_{p'}(\mu, E')$ ein stetiges Funktional auf $L_p(\mu, E)$ darstellt:

Lemma 1.2 *Sind $1 \leq p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, so ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} L_{p'}(\mu, E') &\to L_p(\mu, E)' \\ f' &\mapsto \left(f \mapsto \int_\Omega \langle f'(x), f(x) \rangle_{E',E} \; \mu(dx) \right) \end{aligned}$$

eine lineare, metrische Injektion. Für reflexive Banachräume E ist die Abbildung sogar bijektiv.

Die Reflexivität von E ist für die Surjektivität allerdings nicht notwendig. So wird beispielsweise in ([7], Kap. IV, Satz 1) bewiesen, daß obige Abbildung genau dann surjektiv ist, wenn E' die sogenannte Radon-Nikodym-Eigenschaft (RNP) bezüglich μ besitzt. Der Raum ℓ_1 ist ein Bespiel für einen nichtreflexiven Raum mit RNP. Eine Übersicht über Räume mit und ohne RNP findet sich in ([7], S. 218f.).

1.3 Sublineare Operatoren

Viele der Sätze dieser Arbeit gelten nicht nur für lineare Operatoren, sondern sogar für sogenannte sublineare Operatoren. Diese werden nun vorgestellt. Anschließend werden Eigenschaften wie Stetigkeit und Fortsetzbarkeit untersucht. Zuletzt wird auf eine wichtige Teilklasse, die *maximalen* Operatoren eingegangen

Zunächst werden die für Operatoren $E \to L_p(\mu)$ üblichen Begriffe Homogenität und Sublinearität auf den Banachraum-wertigen Fall übertragen. Um Unklarheiten bei Darstellungen der Form $F = L_p(\delta_a, F)$ für Dirac-Maße δ_a zu vermeiden, werden diese Begriffe bezüglich des zugrunde liegenden Maßes erklärt.

Definition 1.3 *Sind E, F quasinormierte Räume und H ein Raum F-wertiger Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so heißt eine Abbildung $T : E \to H$*

i.) μ-homogen*, falls für jedes $f \in E$, jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und μ-fast alle $x \in \Omega$ gilt:*
$$\|T(\lambda f)(x)\|_F \;=\; |\lambda| \; \|Tf(x)\|_F;$$

ii.) μ-sublinear*, falls sie* μ-homogen *ist und für alle $f, g \in E$ und μ-fast alle $x \in \Omega$ gilt:*
$$\|T(f+g)(x)\|_F \;\leq\; \|Tf(x)\|_F + \|Tg(x)\|_F.$$

Zudem wird die Monotonie von Operatoren $L_p(\mu) \to L_q(\nu)$ erklärt durch:

Definition 1.4 *Sind $0 \leq p, q \leq \infty$, so heißt eine Abbildung $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$* monoton, *falls $|Tf| \leq Tg$ für alle $f, g \in L_q(\mu)$ mit $|f| \leq g$ gilt.*

Es ist klar, daß monotone, ν*-homogene* Operatoren auch positiv sind. Die Umkehrung gilt zwar für lineare Operatoren, schon für $\nu-$sublineare Operatoren ist sie im allgemeinen jedoch falsch.

Es wird nun in den für diese Arbeit wichtigsten Fällen näher untersucht, wann ein homogener Operator stetig in 0 ist.

Lemma 1.5 *Ist E ein quasinormierter Raum und $T : E \to L_o(\mu)$ homogen bezüglich μ, so sind äquivalent:*

i.) T ist stetig in 0.

ii.) Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes integrierbare $A \in \mathcal{A}$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $f \in E$ mit $\|f\|_E \leq 1$ gilt:

$$\mu(A \cap \{x \in \Omega \mid |Tf(x)| \geq \delta\}) \;\leq\; \varepsilon\,. \tag{1.2}$$

Beweis: i.) $\to$ *ii.)* : Sei $\varepsilon > 0$ und A integrierbar, so existiert nach Voraussetzung ein $\alpha > 0$ mit $\alpha B_E \subset T^{-1}(U_{A,\varepsilon,\varepsilon})$. Setzt man $\delta := \varepsilon\alpha^{-1}$, so ist (1.2) erfüllt.
Seien nun umgekehrt $\varepsilon, \gamma > 0$ und A integrierbar. Es existiert dann ein $\delta > 0$, das (1.2) erfüllt. Setzt man $\alpha := \gamma\delta^{-1}$, so gilt $\alpha B_E \subset T^{-1}(U_{A,\varepsilon,\gamma})$ womit die Stetigkeit in 0 bewiesen ist. ◀

Wie für lineare Abbildungen beweist man zudem:

Lemma 1.6 *Sind $1 \leq p \leq \infty$ und $T : E \to L_p(\mu, F)$ $\mu-$homogen, so sind äquivalent:*

i.) T ist stetig in 0.

ii.) Es existiert ein $c \geq 0$, so daß für alle $f \in E$ gilt:

$$\|Tf\|_{L_p(\mu,F)} \;\leq\; c\,\|f\|_E\,. \tag{1.3}$$

In diesem Fall bezeichnet $\|T\|$ das Infimum aller c, die (1.3) erfüllen.

Lemma 1.7 *Sind $0 < p < \infty$, E quasinormiert und $T : E \to L_{p,\infty}(\mu)$ ein $\mu-$homogener Operator, so sind äquivalent:*

i.) T ist stetig in 0.

ii.) Es existiert ein $c \geq 0$, *so daß für alle* $f \in E$, $\alpha > 0$ *gilt:*

$$\mu(|Tf| \geq \alpha) \;\leq\; \left(\frac{c\|f\|_{E}}{\alpha}\right)^{p} \;, \tag{1.4}$$

das heißt $\|Tf\|_{p,\infty} \leq c\|f\|_{E}$.

Ist $E = L_q(\nu)$, *so ist* T *in diesem Fall vom* schwachen Typ (q,p).

Anders als bei linearen Abbildungen impliziert die Stetigkeit in 0 für sublineare Abbildungen jedoch nicht die Stetigkeit in allen Punkten, wie das folgende Beispiel sofort zeigt:

Beispiele 1.8 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} T : L_2([0,2]) & \to & L_1([0,1]) \\ f & \mapsto & \left(\chi_{\mathbb{Q}}\left(\int_1^2 f\, d\lambda\right) - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\left(\int_1^2 f\, d\lambda\right)\right) f_{|[0,1]} \end{array}$$

ist $\lambda_{[0,1]}$*-sublinear und nur in 0 stetig.*

Hat für $0 \leq p \leq \infty$ eine μ-sublineare Abbildung $T : E \to L_p(\mu)$ ihr Bild jedoch in $L_p^{\geq 0}(\mu)$, so folgt aus der Stetigkeit in 0 die gleichmäßige Stetigkeit von T, da in diesem Fall für alle $f,g \in E$ und μ-fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq |T(f-g)(x)| \;.$$

Ist $D \subset E$ dicht und $T : D \to L_p(\mu, F)$ $\mu-$homogen und stetig in 0, so läßt sich T normgleich und $\mu-$homogen auf E fortsetzen. Für sublineare Operatoren kann die Fortsetzung nun sogar sublinear gewählt werden:

Proposition 1.9 *Seien* $1 \leq p \leq \infty$ *und* $D \subset E$ *ein dichter Teilraum sowie* $T : D \to L_p(\mu, F)$ *ein* $\mu-$*sublinearer, in 0 stetiger Operator, dann existiert eine* μ*-sublineare, in 0 stetige und normgleiche Fortsetung* $\tilde{T} : E \to L_p(\mu, F)$ *von* T. *Diese ist im allgemeinen jedoch nicht eindeutig.*

Beweis: Sei $S_1 : D \to L_p(\mu)$, $f \mapsto \|Tf(.)\|_{F}$, so ist S_1 offenbar ebenfalls μ-sublinear mit $\|S_1\| = \|T\|$. Ferner gilt wegen $S_1 f, S_1 g \geq 0$ für alle $f, g \in D$:

$$\|S_1 f - S_1 g\|_p \leq \|S_1(f-g)\|_p = \|T(f-g)\|_{L_p(\mu,\, F)}$$

Da T stetig in 0 ist, ist S_1 daher gleichmäßig stetig. Demnach existiert eine stetige Fortsetzung S_2 von S_1 auf E. Diese ist ebenfalls μ-sublinear; denn für $f, g \in E$ gibt es $f_n, g_n \in D$ mit $f_n \to f$ und $g_n \to g$, und weil S_2 stetig ist, folgt daher $S_2 f_n \to S_2 f, S_2 g_n \to S_2 g$ und $S_2(f_n + g_n) \to S_2(f+g)$

bezüglich $\|.\|_p$. Sukzessive können nun Teilfolgen (f_{n_k}) und (g_{n_k}) gefunden werden, so daß diese Konvergenzen auch μ-fast-überall punktweise gelten. Es folgt dann für μ-fast alle $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |S_2(f+g)(x)| &= \lim_{k\to\infty} |S_1(f_{n_k}+g_{n_k})(x)| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} |S_1 f_{n_k}(x)| + \lim_{k\to\infty} |S_1 g_{n_k}(x)| \\ &= |S_2 f(x)| + |S_2 g(x)| \ , \end{aligned}$$

das heißt S_2 ist μ-subadditiv. Analog kann die μ-Homogenität von S_2 und $\|S_2\| = \|S_1\|$ gezeigt werden. Ohne Einschränkung existiert nun ein $y \in F$ mit $\|y\|_F = 1$, weil andernfalls die Aussage des Lemmas trivial wäre. Setzt man dann $\tilde{T}f := Tf$ für $f \in D$ und ansonsten $\tilde{T}f(x) := S_2 f(x)\ y$, so ist $\tilde{T}$ offensichtlich eine Fortsetzung von T auf E. Wegen

$$\|\tilde{T}f(.)\|_F = |S_2 f(.)|,$$

ist nun $\tilde{T}$ einerseits sublinear und andererseits gilt $\|\tilde{T}\| = \|S_2\|$. Aufgrund der Konstruktion ist klar, daß $\tilde{T}$ nicht die einzig mögliche Fortsetzung ist. ◀

Ein für Anwendungen interessantes Beispiel eines sublinearen Operators liefert die nächste Proposition:

Proposition 1.10 *Seien E ein vollständiger und quasinormierter Raum sowie $T_n : E \to L_o(\mu)$ stetige, lineare Abbildungen, so daß für alle $f \in E$ und μ–fast alle $x \in \Omega$ gilt:*

$$T^* f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f(x)| < \infty \ .$$

Dann ist T^* ein stetiger, μ-sublinearer Operator von E nach $L_o(\mu)$. Er wird als der maximale Operator der T_n *bezeichnet.*

Beweis: Bezeichnet $\pi_n : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}$ die Projektion auf die n–te Koordinate, so sei [1]:

$$\mathsf{L}_o(\mu, \ell_\infty) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \pi_n f(.) \in L_o(\mu) \text{ und } \sup_{n\in\mathbb{N}} |\pi_n f_n(.)| < \infty \ \mu\text{– f.ü. } \}$$

Ferner sei d_o die im zweiten Abschnitt definierte, translationsinvariante Metrik auf $L_o(\mu)$. Setzt man für $f, g \in \mathsf{L}_o(\mu, \ell_\infty)$:

$$d(f,g) \ := \ d_o(\ 0\ ,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\pi_n(f-g)(.)|\ )\ ,$$

[1] Dies ist *nicht* der Raum der stark meßbaren Funktionen mit Werten in ℓ_∞ wie ein Beispiel von Sierpinski in [7], S.43 zeigt.

so ist d eine translationsinvariante Metrik auf $\mathsf{L}_o(\mu, \ell_\infty)$. Zudem kann leicht gezeigt werden, daß d vollständig ist. Ferner ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathsf{L}_o(\mu, \ell_\infty) & \to & L_o(\mu) \\ f & \mapsto & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\pi_n f(.)| \end{array}$$

stetig in 0. Nach Voraussetzung ist ferner

$$\begin{array}{rcl} U : E : & \to & \mathsf{L}_o(\mu, \ell_\infty) \\ f & \mapsto & \Big(x \mapsto (T_n f(x))_n\Big) \end{array}$$

definiert und, wie leicht gesehen werden kann, auch graphenabgeschlossen. Nach dem Graphensatz für vollständige, metrisierbare Räume (siehe dazu [16], S. 171, (3')) ist U somit stetig. Wegen $T^* = \phi \circ U$ ist dann T^* stetig in 0. Da T^* nach $L_o^{\geq 0}(\mu)$ abbildet, ist die Behauptung bewiesen. ◀

1.4 Multiplikationsoperatoren und Gewichte

Dieser Abschnitt behandelt die für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften von Multiplikationsoperatoren. Viele dieser Aussagen werden in den späteren Kapitel intensiv ausgenutzt werden.

Ist $g \in L_o(\mu)$, so wird mit

$$\begin{array}{rcl} M_g : L_o(\mu, E) & \to & L_o(\mu, E) \\ f & \mapsto & (x \mapsto g(x)\ f(x)) \end{array}$$

der zu g gehörige *Multiplikationsoperator* bezeichnet. Einschränkungen dieses Operators im Definitions- oder Bildraum werden ebenfalls mit M_g bezeichnet.

Proposition 1.11 *Für jedes $\sigma-$endliche Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ existiert ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P und ein $g \in L_o^{>0}(\mu)$, so daß die Abbildungen*

i.) $M_{\chi_\Omega} : L_{p,\infty}(\mu) \to L_{p,\infty}(P)$ *und*

ii.) $M_g : L_{p,\infty}(P) \to L_{p,\infty}(\mu)$

definiert, stetig und injektiv sind.

Beweis: Da für endliche Maße μ die Aussage trivial ist, sei ohne Einschränkung $\mu(\Omega) = \infty$. Außerdem seien $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt mit $\sum_{n=1}^\infty A_n =$

Ω und $\mu(A_n) < \infty$. Ohne Einschränkung kann ferner $\mu(A_n) \geq 1$ angenommen werden. Für

$$h := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu(A_n)^{-1}\chi_{A_n}$$

ist dann $dP := hd\mu$ ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Da nach Konstruktion $h \leq 1$ ist, folgt $P(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, womit die Behauptung für $M_{\chi\Omega}$ klar ist. Setzt man $a_n := 4^n\mu(A_n)^{1/p}$ und $g := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}\chi_{A_n}$, so gilt ferner für alle $f \in L_{p,\infty}(P)$ und $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in \Omega \mid |gf(x)| \geq \alpha\}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \cap \{x \in \Omega \mid a_n^{-1}|f(x)| \geq \alpha\}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\ \mu(A_n)\ P\left(A_n \cap \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \alpha a_n\}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\ \mu(A_n)\ P\left(\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \alpha a_n\}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\ \mu(A_n) \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\infty}(P)}}{\alpha\ a_n}\right)^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\infty}(P)}}{\alpha}\right)^p \\
&= \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\infty}(P)}}{\alpha}\right)^p ,
\end{aligned}$$

das heißt $\|M_g f\|_{L_{p,\infty}(\mu)} \leq \|f\|_{L_{p,\infty}(P)}$. Die Injektivität folgt aus $g > 0$.
◀

Proposition 1.12 *Sind $1 \leq p < q \leq \infty$ und $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $g \in L_\alpha^{>0}(\mu)$, so ist $M_g : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, E)$ definiert, stetig und injektiv. Ferner ist $H := \mathfrak{Im}\ M_g$ dicht in $L_p(\mu, E)$.*

Beweis: Nach der Hölderungleichung ist M_g definiert und stetig, und weil $g > 0$ ist, folgt auch die Injektivität. Für die Dichtheit wird als erstes der skalare Fall $E = \mathbb{K}$ behandelt. Nach dem Satz von Hahn-Banach reicht es zu zeigen, daß für jedes $\varphi \in L_p(\mu)' = L_{p'}(\mu)$ mit $\overline{H} \subset \mathfrak{Ker}\ \varphi$ notwendigerweise $\varphi = 0$ ist. Sei also $\varphi \in L_{p'}(\mu)$ mit $\int \varphi g f d\mu = 0$ für alle $f \in L_q(\mu)$. Weil $\frac{1}{p'} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{q'}$ ist, folgt $\varphi g \in L_{q'}(\mu) \subset L_q(\mu)'$ und daher $\varphi g = 0$. Wegen $g > 0$, ist somit $\varphi = 0$. Sei nun E ein beliebiger Banachraum und $f \in L_p(\mu)$. Wie eben bewiesen, gibt es dann $f_n \in L_q(\mu)$ mit $\|f - gf_n\|_p \to 0$. Für $x \in E$ gilt somit $f \otimes x = (\lim gf_n) \otimes x = \lim M_g(f_n \otimes x) \in \overline{H}$. Also ist $L_p(\mu) \otimes E \subset \overline{H}$ und daher auch $L_p(\mu, E) \subset \overline{H}$.
◀

Damit kann nun folgender Fortsetzungssatz bewiesen werden:

Korollar 1.13 *Seien $1 \leq r < q \leq \infty$, $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$ und $g \in L_\alpha^{\geq 0}(\mu)$. Bezeichnet $\mathfrak{Im}\ M_g$ wieder das Bild von $M_g : L_q(\mu, E) \to L_r(\mu, E)$, so läßt sich jeder lineare und stetige Operator $T : (\mathfrak{Im}\ M_g, \|.\|_r) \to L_p(\nu, F)$ normgleich auf $L_r(\mu, E)$ fortsetzen.*

Beweis: Setzt man $A := \{g = 0\}$ und damit

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{f \in L_r(\mu, E) \mid f_{|A} \equiv 0\ \} \text{ und} \\ H_2 &:= \{f \in L_r(\mu, E) \mid f_{|(\Omega \setminus A)} \equiv 0\ \}, \end{aligned}$$

so ist $L_r(\mu, E)$ offensichtlich isometrisch isomorph zu $H_1 \oplus_r H_2$. Daher ist $P = M_{\chi_{\Omega \setminus A}}$ eine Projektion von $L_r(\mu, E)$ auf H_1 mit $\|P\| \leq 1$. Nach Proposition 1.12 ist nun $H_1 = \overline{\mathfrak{Im}\ M_g}$. Es existiert daher eine lineare und normgleiche Fortsetzung $T_1 : H_1 \to L_p(\nu, F)$ von T. Durch $\tilde{T} := T_1 \circ P$ läßt sich dann eine lineare und normgleiche Fortsetzung von T auf $L_r(\mu, E)$ definieren.◀

Das nächste Lemma befaßt sich mit der „Invertierung“ von Multiplikationsoperatoren für Funktionen $g \geq 0$:

Lemma 1.14 *Seien $0 < p \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ und $g \in L_\alpha^{\geq 0}(\mu)$. Für jedes $f \in \mathfrak{Im}\ M_g \subset L_p(\mu, E)$ ist dann $g^{-1} f \in L_q(\mu, E)$ und es gilt $M_g(g^{-1} f) = f$.*

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $h \in L_q(\mu, E)$ mit $gh = f$. Insbesondere ist daher $f_{|\{g=0\}} \equiv 0$. Daher folgt $\|g^{-1}(x) f(x)\|_E \leq \|h(x)\|_E$ für μ-fast alle $x \in \{g = 0\}$. Da für μ-fast alle $x \in \{g > 0\}$ zudem $h(x) = g^{-1}(x) f(x)$ ist, folgt insgesamt $g^{-1} f \in L_q(\mu, E)$. Weil $g(x) g^{-1}(x) = 0$ für alle $x \in \{g = 0\}$ ist, gilt wegen $f_{|\{g=0\}} \equiv 0$ auch $g g^{-1} f = f$. ◀

Das folgende Lemma zeigt, daß der duale Operator eines Multiplikationsoperators wieder eine Multiplikationsoperator ist:

Lemma 1.15 *Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ und $g \in L_\alpha^{\geq 0}(\mu)$, so gilt für den dualen Operator von $M_g : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, E)$:*

$$(M_g)' f = g f$$

für alle $f \in L_{p'}(\mu, E') \subset L_p(\mu, E)'$.

Beweis: Ist $f \in L_{p'}(\mu, E')$, so ist wegen $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{p'}$ und der Hölderungleichung $gf \in L_{q'}(\mu, E')$. Ist nun $h \in L_q(\mu, E)$, so gilt:

$$\langle gf, h\rangle = \int_\Omega \langle g(x)f(x), h(x)\rangle \, \mu(dx) = \int_\Omega \langle f(x), g(x)h(x)\rangle \, \mu(dx) = \langle f, M_g h\rangle \, . \blacktriangleleft$$

Das nächste Lemma ist ebenfalls rein technischer Natur. Es sichert die Existenz bestimmter Multiplikationsoperatoren, die in den späteren Kapitel wichtig sind:

Lemma 1.16 *Sind $0 < p \le q \le \infty$ und $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, so gilt*

i.) Für jedes $f \in L_q(\mu)$ existiert ein $g \in \mathcal{W}^1_\alpha(\mu)$ mit $\|gf\|_p = \|f\|_q$.

ii.) Für jedes $f \in L_p(\mu)$ existiert ein $h \in \mathcal{W}^1_\alpha(\mu)$ mit $\|h^{-1}f\|_q = \|f\|_p$.

Es gibt also zu jedem f einen die Norm von f erhaltenden Multiplikationsoperator und einen Multiplikationsoperator, in dessen Bild f liegt.

Beweis: zu *i.)*: Ohne Einschränkung kann $p < q$ und $f \neq 0$ angenommen werden. Setzt man dann für $x \in \Omega$:

$$g(x) := \|f\|_q^{-q/\alpha} \, |f(x)|^{q/\alpha} \, ,$$

so gilt einerseits:

$$\int_\Omega |g|^\alpha \, d\mu = \|f\|_q^{-q} \, \|f\|_q^q = 1$$

und andererseits wegen $p + \frac{pq}{\alpha} = q$:

$$\left(\int_\Omega |gf|^p d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_q^{-q/\alpha} \left(\int_\Omega |f|^{p+pq/\alpha} d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_q^{-q/\alpha} \, \|f\|_q^{q/p} = \|f\|_q \, .$$

zu *ii.)*: Auch hier ist nur der Fall $p < q$ und $f \neq 0$ interessant. Setzt man für $x \in \Omega$:

$$h(x) := \|f\|_p^{-p/\alpha} \, |f(x)|^{p/\alpha} \, ,$$

so kann wie eben die Behauptung durch nachrechnen gezeigt werden. ◀

Man beachte, daß durch $u := g^r$ und $w := h^r$ die Aussage des letzten Lemmas in Aussagen über „Gewichte“ transformiert werden können.

1.5 Rademacherfunktionen, Typ und Kotyp

In diesem Abschnitt werden die Rademacherfunktionen eingeführt, um sodann den Typ und Kotyp von Banachräumen definieren zu können. Als weitere, wichtige Hilfsmittel in diesem Zusammenhang werden die Khintchine- und die Kahane-Ungleichung vorgestellt.

Definition 1.17 *Sind $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 2^n$ und $I_{n,k} := [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[$, so heißt*

$$\begin{aligned} r_n : [0,1[\; &\to \; \{-1,1\} \\ t \; &\mapsto \; \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k+1} \chi_{I_{n,k}}(t) \end{aligned}$$

die n-te Rademacherfunktion.

Die gemeinsame Verteilung der ersten n Rademacherfunktionen läßt sich folgendermaßen bestimmen:

Lemma 1.18 *Sind $D_n := \{-1,1\}^n$ und $R_n(t) := (r_1(t), \ldots, r_n(t))$, so gibt es für jedes $s \in D_n$ genau ein $1 \leq k \leq 2^n$, so daß gilt:*

$$R_n^{-1}(\{s\}) = I_{n,k} \ .$$

Insbesondere ist das Bildmaß $\lambda(R_n)$ Laplace-verteilt.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ die Behauptung wahr und $(s_1, \ldots, s_{n+1}) \in D_{n+1}$. Dann gibt es genau ein $1 \leq k \leq 2^n$ mit $R_n^{-1}(\{(s_1, \ldots, s_n)\}) = I_{n,k} = I_{n+1,2k-1} \cup I_{n+1,2k}$. Ohne Einschränkung kann $s_{n+1} = 1$ angenommen werden. Es ist dann $r_{n+1}^{-1}(\{s_{n+1}\}) = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n+1,2i-1}$ und damit

$$\begin{aligned} R_{n+1}^{-1}(\{(s_1, \ldots, s_{n+1})\}) &= R_n^{-1}(\{(s_1, \ldots, s_n)\}) \cap r_{n+1}^{-1}(\{s_{n+1}\}) \\ &= I_{n,k} \cap \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n+1,2i-1} \\ &= I_{n+1,2k-1} \ . \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rademacherfunktionen läßt sich nun folgende Ungleichung formulieren, deren Beweis sich in ([9], S. 582f.) finden läßt:

Proposition 1.19 (Khintchine-Ungleichung) *Für $0 < p < \infty$ existieren Konstanten $1 \leq a_p, b_p \leq \infty$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$a_p^{-1} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right|^p dt \right)^{1/p} \leq b_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} .$$

Ersetzt man $\mathbb{K}$ durch einen beliebigen Banachraum E, so gilt die Khintchine-Ungleichung nicht mehr. Immerhin gibt es jedoch Banachräume, die ähnliche Ungleichungen zulassen:

Definition 1.20 *Ein Banachraum E hat*

i.) *Typ $p \in [1,2]$, falls ein $c > 0$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in E$ gilt:*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|_E^2 dt \right)^{1/2} \leq c \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^p \right)^{1/p} . \tag{1.5}$$

In diesem Fall wird das kleinste solche c Typ-p-Konstante von E *genannt und mit $T_p(E)$ bezeichnet.*

ii.) *Kotyp $p \in [2,\infty]$, falls ein $c > 0$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in E$ gilt:*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^p \right)^{1/p} \leq c \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|_E^2 dt \right)^{1/2} . \tag{1.6}$$

Hierbei ist für $p = \infty$ die übliche Modifikation in Ungleichung (1.6) vorzunehmen. Analog zu i.) wird mit $C_p(E)$ das kleinste solche c bezeichnet.

Einige Aussagen über Typ und Kotyp bestimmter Banachräume faßt die folgende Proposition zusammen. Ein Beweis der wichtigen Aussagen *iii.*) und *iv.*) findet sich in ([34], III.A.23).

Proposition 1.21 *Es gilt:*

i.) *Jeder Banachraum hat Typ 1 und Kotyp ∞.*

ii.) *Jeder Hilbertraum hat Typ und Kotyp 2.*

iii.) *Für $1 \leq p \leq 2$ hat $L_p(\mu)$ Typ p und Kotyp 2.*

iv.) *Für $2 \leq p < \infty$ hat $L_p(\mu)$ Typ 2 und Kotyp p.*

v.) *Hat E Typ p und Kotyp q und sind $1 \leq p_1 \leq p$ und $q \leq q_1 \leq \infty$, so hat E auch Typ p_1 und Kotyp q_1.*

Im Zusammenhang mit Typ und Kotyp erweist sich zudem die folgende Ungleichung als nützlich, deren Beweis in ([34], III.A.18) zu finden ist:

Proposition 1.22 (Kahane-Ungleichung) *Für $1 \leq p < \infty$ existiert eine Konstante $0 < K_p < \infty$, so daß für jeden Banachraum E und jede endliche Folge $x_1, \ldots, x_n \in E$ gilt:*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|_E dt \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|_E^p dt \right)^{1/p} \leq K_p \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|_E dt.$$

Schließlich wird noch der Raum $L_p(\mu)$ für $0 < p < 1$ untersucht:

Bemerkung 1.23 *Sind $0 < p < 1$, so folgt mit Hilfe der Khintchine-Ungleichung:*

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_p^p dt \right)^{1/p} &= \left(\int_\Omega \int_0^1 |\sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(x)|^p dt \ \mu(dx) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_\Omega b_p^p \ (\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2)^{p/2} \mu(dx) \right)^{1/p} \\ &\leq b_p \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $f_1, \ldots, f_n \in L_p(\mu)$. In gewisser Weise hat also $L_p(\mu)$ für $0 < p < 1$ „Typ p“.

Kapitel 2

Zwei Sätze von Nikishin und Stein

In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen es zu einem $\mu-$sublinearen, in 0 stetigen Operator $T : E \to L_o(\mu)$ und festem p ein zu μ *äquivalentes* Maß ν gibt, so daß $T : E \to L_{p,\infty}(\nu)$ definiert und in 0 stetig ist. Ein Operator T, für den es ein solches Maß gibt, bildet also in einen *kleineren* Raum ab und hat eine *schärfere* Stetgikeit als a-priori angenommen wurde.
Im ersten Abschnitt wird die Existenz eines solchen Maßes ν zunächst als Faktorisierung des Operators T durch $L_{p,\infty}(\mu)$ mit Hilfe eines Multiplikationsoperators gedeutet. Sodann werden die Operatoren, für die eine solche Zerlegung möglich ist, durch Eigenschaften ihrer vektorwertigen Fortsetzungen $(f_1, f_2, \ldots) \to (Tf_1, Tf_2, \ldots)$ charakterisiert.
Mit Hilfe dieser Charakterisierung wird dann im zweiten Abschnitt gezeigt, daß es zu *jedem* $\mu-$sublinearen, in 0 stetigen Operator $T : E \to L_o(\mu)$ ein gesuchtes Maß ν gibt, falls E vom Typ p ist. Als Folgerung ergibt sich ein Satz von Nikishin, demzufolge für $1 \leq p \leq 2$ jeder μ-sublineare, in 0 stetige Operator $T : L_p(\mu) \to L_o(\nu)$ vom schwachen Typ (p, p) ist bezüglich eines zu ν äquivalenten Maßes.
Im allgemeinen kann die Form dieses äquivalenten Maßes nicht näher bestimmt werden. Anders ist dies jedoch beispielsweise für translationsinvariante Operatoren, wie im dritten Abschnitt gezeigt wird. Hauptergebnis ist hier ein Satz von Stein, nach dem für kompakte Gruppen G und $1 \leq p \leq 2$ jeder sublineare, in 0 stetige Operator $T : L_p(G) \to L_o(G)$ vom schwachen Typ (p, p) ist. Abschließend wird dann angedeutet, inwieweit dieser Satz für Fragestellungen in der harmonischen Analysis von Bedeutung ist.

2.1 Eine grundlegende Charakterisierung

In diesem Abschnitt wird die schon oben angedeutete Charakterisierung zunächst für *endliche* Maße μ bewiesen. Anschließend werden die Ergebnisse dann für $\sigma-$ endliche Maße gezeigt.

Es wird als erstes folgende Bezeichnung eingeführt:

Definition 2.1 *Seien $0 < p < \infty$ und $T : E \to L_o(\mu)$ ein μ-sublinearer, in 0 stetiger Operator. Dann* faktorisiert T stark *durch $L_{p,\infty}(\mu)$, falls es ein $g \in L_o^{>0}(\mu)$, und einen μ-sublinearen, in 0 stetigen Operator $T_o : E \to L_{p,\infty}(\mu)$ gibt, so daß*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T_o"'] & & L_o(\mu) \\
& L_{p,\infty}(\mu) \arrow[ur, "M_g"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. In diesem Fall ist $g^{-1}Tf = T_o f$ für alle $f \in E$.

Für endliche Maßräume gilt nun die folgende, grundlegende Charakterisierung:

Satz 2.2 *Sind μ ein endliches Maß, $0 < p < \infty$ und $T : E \to L_o(\mu)$ ein μ-sublinearer und in 0 stetiger Operator, so sind äquivalent:*

i.) *T faktorisiert stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$.*

ii.) *Es existiert ein $w \in L_o^{>0}(\mu)$, so daß für alle $f \in E, \alpha > 0$ gilt:*

$$\int\limits_{|Tf| \geq \alpha} w(x)\mu(dx) \;\leq\; \left(\frac{\|f\|_E}{\alpha}\right)^p . \tag{2.1}$$

iii.) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren ein $c_\varepsilon > 0$ und ein $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\Omega \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, so daß für alle $f \in E, \alpha > 0$ gilt:*

$$\mu\Big(A_\varepsilon \cap \{x \in \Omega \mid |Tf(x)| \geq \alpha\}\Big) \;\leq\; c_\varepsilon \left(\frac{\|f\|_E}{\alpha}\right)^p . \tag{2.2}$$

iv.) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle Folgen $(f_n) \subset E$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_E^p \leq 1$ gilt:*

$$\mu\Big(\{x \in \Omega \mid \sup_n |Tf_n| \geq \delta\}\Big) \;\leq\; \varepsilon . \tag{2.3}$$

Die Äquivalenz von *i.)* und *ii.)* besagt, daß ein Operator T gerade dann stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$ faktorisiert, wenn er für ein äquivalentes Maß $wd\mu$ sogar nach $L_{p,\infty}(wd\mu)$ abbildet und stetig in 0 ist. Die eingangs erläuterte Fragestellung kann also tatsächlich mit der starken Faktorisierung durch $L_{p,\infty}(\mu)$ beschrieben werden.

Die Aussage *iv.*) bedeutet, daß -mit der Bezeichnung aus Proposition 1.10- der μ-sublineare Operator

$$\begin{array}{rcl} T^{\mathbb{N}} : \ell_p(E) & \to & \mathsf{L}_o(\mu, \ell_\infty) \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (Tf_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

definiert und stetig in 0 ist. Die Implikation *iv.*) $\to$ *i.*) wird im weiteren Verlauf dazu verwendet, Räume E zu bestimmen, für die *jeder* Operator stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$ faktorisiert.

Beweis: iii.) $\to$ *ii.*): Es seien $c_{1/n}$ und $A_{1/n}$ gemäß Voraussetzung gewählt. Ohne Einschränkung kann dabei $c_{1/n} \geq 1$ angenommen werden. Setzt man dann

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, c_{1/n}^{-1}\, \chi_{A_{1/n}}\ ,$$

so gilt zunächst $\mu(w > 0) \geq \mu(A_{1/n}) \geq \mu(\Omega) - 1/n$, also $w \in L_o^{>0}(\mu)$. Für $f \in E$ und $\alpha > 0$ folgt dann nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} \int\limits_{|Tf|\geq\alpha} w(x)\,\mu(dx) &= \int\limits_{|Tf|\geq\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, c_{1/n}^{-1}\ \chi_{A_{1/n}}(x)\,\mu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, c_{1/n}^{-1}\ \mu\Big(A_{1/n} \cap \{|Tf| \geq \alpha\}\Big) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{\|f\|_E}{\alpha}\right)^p = \left(\frac{\|f\|_E}{\alpha}\right)^p . \end{aligned}$$

ii.) $\to$ *i.*) : Es sei $A_n := \{x \in \Omega \mid 1/n \leq w(x) < 1/(n-1)\}$ und damit

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, \chi_{A_n}\ .$$

Wegen $w > 0$ folgt dann $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\Omega)$ und deshalb $g > 0$. Es muß also noch gezeigt werden, daß $f \mapsto g^{-1}Tf$ nach $L_{p,\infty}(\mu)$ abbildet und stetig in 0 ist. Dazu sei $c := \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-pn}$. Es ist dann $c < \infty$, und es gilt für alle $f \in E$ und $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \mu\left(\left|\tfrac{1}{g}Tf\right| \geq \alpha\right) &= \mu\left(|Tf| \geq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \chi_{A_n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} \chi_{\{|Tf|\geq\alpha 2^n\}}\ d\mu \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} \chi_{\{|Tf|\geq\alpha 2^n\}}\ n\ w(x)\ \mu(dx) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \int\limits_{|Tf|\geq\alpha 2^n} w(x)\ \mu(dx)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\|f\|_{E}}{\alpha 2^n}\right)^p = c\left(\frac{\|f\|_{E}}{\alpha}\right)^p .$$

i.) $\rightarrow$ *iv.)* : Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es wegen $\mu(\Omega) < \infty$ ein $\delta > 0$ mit $\mu(|g| \geq \sqrt{\delta}) \leq \varepsilon$. Ferner gibt es nach Voraussetzung ein $c > 0$ mit $\|g^{-1}Tf\|_{p,\infty} \leq c\ \|f\|_{E}$ für alle $f \in E$. Ohne Einschränkung kann nun angenommen werden, daß $\sqrt{\delta} \geq c\ \varepsilon^{-1/p}$, das heißt $(\frac{c}{\sqrt{\delta}})^p \leq \varepsilon$, ist. Für eine Folge $(f_n) \subset E$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{E}^p \leq 1$ gilt damit insgesamt:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\sup_n |Tf_n| \geq \delta\right) &\leq \mu\left(\sup_n \left|\tfrac{1}{g}Tf_n\right| \geq \sqrt{\delta}\right) + \mu\left(|g| \geq \sqrt{\delta}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left|\tfrac{1}{g}Tf_n\right| \geq \sqrt{\delta}\right) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c\ \|f_n\|_{E}}{\sqrt{\delta}}\right)^p + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \|f_n\|_{E}^p + \varepsilon \quad \leq \quad 2\varepsilon .
\end{aligned}$$

iv.) $\rightarrow$ *iii.)* : Es kann ohne Einschränkung $\mu(\Omega) = 1$ angenommen werden. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Vorraussetzung ein $\delta > 0$, derart daß $\mu\left(\sup_n |Tf_n| \geq \delta\right) < \varepsilon$ für alle Folgen $(f_n) \subset E$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{E}^p \leq 1$ ist. Setzt man dann $c_\varepsilon := \delta^p$, so gilt für

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{A} \mid \exists f_A \in B_E \ \ \forall x \in A :\ \mu(A) \cdot |Tf_A(x)|^p > c_\varepsilon\}$$

das folgende Lemma:

Lemma 2.3 *Sind $A \in \mathcal{A}, f \in E$ und $\alpha > 0$ mit*

$$\mu(A \cap \{x \in \Omega \mid |Tf(x)| \geq \alpha\}) \ > \ c_\varepsilon \left(\frac{\|f\|_{E}}{\alpha}\right)^p ,$$

so ist $\tilde{A} := A \cap \{x \in \Omega \mid |Tf(x)| \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$.

Beweis des Lemmas: Ist $f_{\tilde{A}} := \|f\|_{E}^{-1} \cdot f$, so gilt für $x \in \tilde{A}$ zunächst:

$$|Tf_{\tilde{A}}(x)| \ = \ \|f\|_{E}^{-1}|Tf(x)| \ \geq \ \alpha\|f\|_{E}^{-1} .$$

Damit folgt dann nach Voraussetzung:

$$\mu(\tilde{A}) \cdot |Tf_{\tilde{A}}(x)|^p \ > \ c_\varepsilon \left(\frac{\|f\|_{E}}{\alpha}\right)^p \left(\frac{\alpha}{\|f\|_{E}}\right)^p = c_\varepsilon . \qquad \blacktriangleleft$$

Ist nun $\mathcal{F} = \emptyset$, so erfüllt $A_\varepsilon := \Omega$ die Bedingung (2.2), da es ansonsten nach Lemma 2.3 ein $f \in E$ und ein $\alpha > 0$ gäbe, so daß $A_\varepsilon \cap \{|Tf| \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$ ist.
Ist andernfalls $\mathcal{F} \neq \emptyset$, so ist auch

$$\mathcal{Z} := \{\mathcal{T} \subset \mathcal{F} \mid \forall A, B \in \mathcal{T} : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset\}$$

nichtleer. Da $\mathcal{Z}$ vermöge der Inklusion induktiv geordnet ist, besitzt $\mathcal{Z}$ nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element $\mathcal{T}_{max}$. Für jedes $B \in \mathcal{T}_{max}$ gilt $\mu(B) > 0$ nach Definition von $\mathcal{F}$. Wäre nun $\mathcal{T}_{max}$ überabzählbar, so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ und unendlich viele, disjunkte $B_i \in \mathcal{T}_{max}$ mit $\mu(B_i) \geq 1/n$. Dies steht aber im Widerspruch zur Endlichkeit von μ. Es gibt also ein $D \subset \mathbb{N}$ derart, daß $\mathcal{T}_{max} = \{B_i | i \in D\}$ und $i \neq j \to B_i \neq B_j$. Gäbe es für

$$A_\varepsilon := \Omega \setminus \bigcup_{i \in D} B_i$$

ein $\alpha > 0$ und ein $f \in E$, die (2.2) nicht erfüllten, so wäre nach Lemma 2.3 $A_\varepsilon \cap \{|Tf| \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$. Weil aber $A_\varepsilon \cap \{|Tf| \geq \alpha\}$ disjunkt zu allen B_i ist, stünde dies im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{T}_{max}$. Es bleibt also noch $\mu(\Omega \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ zu zeigen. Sei nun zu B_i eine Funktion f_{B_i} gemäß der Definition von $\mathcal{F}$ gewählt. Für $i \in \mathbb{N}$ sei dann $f_i := \mu(B_i)^{1/p} f_{B_i}$, falls $i \in D$ und $f_i := 0$ ansonsten. Ist $x \in B_n$, so gilt nach Definition von $\mathcal{F}$:

$$\sup_i |Tf_i(x)| \;\geq\; |Tf_n(x)| \;=\; \mu(B_n)^{1/p} \cdot |Tf_{B_n}(x)| \;>\; c_\varepsilon^{1/p} \;=\; \delta\ ,$$

das heißt insgesamt $\bigcup_{i \in D} B_i \subset \{\sup_i |Tf_i| \geq \delta\}$. Wegen $\|f_{B_i}\|_E \leq 1$ gilt außerdem:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_E^p \;=\; \sum_{i \in D} \left\|\mu(B_i)^{1/p} f_{B_i}\right\|_E^p \;\leq\; \sum_{i \in D} \mu(B_i) \;=\; \mu(\sum_{i \in D} B_i) \;\leq\; 1$$

und nach Vorraussetzung schließlich:

$$\mu(\Omega \setminus A_\varepsilon) \;=\; \mu\left(\bigcup_{i \in D} B_i\right) \;\leq\; \mu\left(\sup_i |Tf_i| \geq \delta\right) \;<\; \varepsilon\ . \qquad \blacktriangleleft$$

Für viele Anwendungen ist die Forderung nach der Endlichkeit des Maßes μ zu stark. Der folgende Satz behebt dieses Problem in Hinblick auf die Sätze des nächsten Abschnittes:

Satz 2.4 *Ist μ ein $\sigma-$endliches Maß, so existiert ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P, so daß für jeden $\mu-$sublinearen, in 0 stetigen Operator $T : E \to L_o(\mu)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

i.) T faktorisiert stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$.

ii.) T faktorisiert stark durch $L_{p,\infty}(P)$.

Beweis: Sei P gemäß Proposition 1.11 gewählt.
ii.) $\to$ *i.)* : Da P und μ äquivalent sind, ist $id : L_o(P) \to L_o(\mu)$ ein Homöomorphismus. Ist nun $g \in L_o^{>0}(\mu)$ nach Proposition 1.11, *ii.)* gewählt, so kommutiert für ein geeignetes $h \in L_o^{>0}(P)$ das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & & L_o(P) \arrow[rr, "id"] & & L_o(\mu) \\
& L_{p,\infty}(P) \arrow[ur, "M_h"'] \arrow[rr, "M_g"'] & & L_{p,\infty}(\mu) \arrow[ur, "M_{hg^{-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Also faktorisiert T stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$. Die umgekehrte Implikation ist analog zu beweisen. ◀

Die nächste Bemerkung ist ebenfalls für die folgenden Abschnitte wichtig:

Bemerkung 2.5 *Ist μ σ-endlich, so faktorisiert ein $\mu-$sublinearer, in 0 stetiger Operator $T : E \to L_o(\mu)$ genau dann stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$, wenn es ein $w \in L_o^{\geq 0}(\mu)$ gibt, so daß $T : E \to L_{p,\infty}(wd\mu)$ definiert und stetig in 0 ist.*

Beweis: Da der Beweis *ii.)* $\to$ *i.)* in Satz 2.2 nicht die Endlichkeit des Maßes benötigte, ist die Rückrichtung schon bewiesen worden. Andererseits existiert nach Satz 2.4 ein äquivalents Wahrscheinlichkeitsmaß P, so daß T stark durch $L_{p,\infty}(P)$ faktorisiert. Bezeichnet g die Dichte von P bezüglich μ, so existiert damit nach Satz 2.2 *i.)* $\to$ *ii.)* ein $v \in L_o^{>0}(P)$, so daß für alle $f \in E$ und $\alpha > 0$ gilt:

$$\int\limits_{|Tf|\geq\alpha} v(x)\ g(x)\ \mu(dx) \;=\; \int\limits_{|Tf|\geq\alpha} v(x)\ P(dx) \;\leq\; \left(\frac{\|f\|_{E}}{\alpha}\right)^{p} .$$

Das heißt, $w := vg \in L_o^{>0}(\mu)$ ist das gesuchte Gewicht. ◀

2.2 Ein Satz von Nikishin

Es wird nun gezeigt, daß für Räume E vom Typ p die Ungleichung (2.3) von jedem μ-sublinearen, in 0 stetigen Operator $T : E \to L_o(\mu)$ erfüllt wird. Zu Beginn werden monotone Operatoren bezüglich Ungleichung (2.3) untersucht.

Satz 2.6 *Sind* $0 < p < \infty$ *und* $T : L_p(\mu) \to L_o(\nu)$ *ein* ν*-sublinearer, monotoner und in 0 stetiger Operator, so faktorisiert* T *stark durch* $L_{p,\infty}(\nu)$*.*

Beweis: Nach Satz 2.4 kann ohne Einschränkung $\nu(O) = 1$ angenommen werden. Es soll nun Ungleichung (2.3) aus Satz 2.2 überprüft werden. Da T stetig in 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\mu(|Tf| \geq \delta) \leq \varepsilon$ für alle $f \in L_p(\mu)$ mit $\|f\|_p \leq 1$. Sei (f_n) eine Folge in $L_p(\mu)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^p \leq 1$. Setzt man

$$f := (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p)^{1/p} ,$$

so ist nach Beppo-Levi

$$\|f\|_p^p \;=\; \int\limits_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^p \;\leq\; 1 .$$

Da ferner $|f_n| \leq f$ ist, folgt zudem $\sup_n |Tf_n| \leq |Tf|$ aus der Monotonie von T. Damit gilt insgesamt:

$$\nu(\sup_n |Tf_n| \geq \delta) \quad \leq \quad \nu(\, |Tf| \geq \delta \,) \quad \leq \quad \varepsilon . \quad ◀$$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß für Räume E vom Typ p jeder Operator $T : E \to L_o(\mu)$ stark durch $L_{p,\infty}(\mu)$ faktorisiert. Dazu wird jedoch ein kleines Lemma benötigt:

Lemma 2.7 *Sind* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *meßbar,* $\varepsilon_i = \pm 1$ *und* $r(t) := (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ *beziehungsweise* $r_\varepsilon(t) := (\varepsilon_1 r_1(t), \ldots, \varepsilon_n r_n(t))$ *für* $t \in [0, 1[$*, so sind die Funktionen* $F \circ r$ *und* $F \circ r_\varepsilon$ *gleichverteilt.*

Beweis: Seien $\mu := \lambda^n(r)$ und $\mu_\varepsilon := \lambda^n(r_\varepsilon)$ die Bildmaße von r und r_ε auf dem $\mathbb{R}^n$. Für $s := (s_1, \ldots, s_n) \in D_n := \{-1, 1\}^n$ gilt dann wegen $\mu_\varepsilon(\{s\}) = \mu(\{(\varepsilon_1 s_1, \ldots, \varepsilon_n s_n)\})$ nach Lemma 1.18:

$$\mu(\{s\}) = 2^{-n} = \mu_\varepsilon(\{s\}) .$$

Da D_n der Träger der Maße μ und μ_ε im $\mathbb{R}^n$ ist, folgt somit $\mu = \mu_\varepsilon$. Insgesamt gilt daher für jedes $A \in \mathcal{B}$:

$$\lambda(F \circ r)(A) = \mu(F)(A) = \mu_\varepsilon(F)(A) = \lambda(F \circ r_\varepsilon)(A) . \quad ◀$$

Satz 2.8 *Sind* $0 < p \leq 2$ *und* $E = L_p(\nu)$ *für* $0 < p < 1$ *beziehungsweise* E *vom Typ* p *für* $1 \leq p \leq 2$*, so faktorisiert jeder* μ*-sublineare, in 0 stetige Operator* $T : E \to L_o(\mu)$ *stark durch* $L_{p,\infty}(\mu)$*.*

Beweis: Nach Satz 2.4 kann wiederum ohne Einschränkung $\mu(\Omega) = 1$ vorausgesetzt werden. Analog zu Satz 2.6 soll die Ungleichung (2.3) aus Satz 2.2 gezeigt werden. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert, da T stetig in 0 ist, ein $\delta > 0$, so daß $\mu(|Tf| \geq \sqrt{\delta}) \leq \varepsilon$ für alle $f \in B_E$ ist. Ohne Einschränkung kann zusätzlich $\delta > \varepsilon^{-2/p}$ angenommen werden. Ist nun (f_i) eine Folge in E mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_E^p \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$, so wird für $x \in \Omega, t \in [0,1[,\ k \leq n$ gesetzt:

$$\begin{aligned} g_t &:= \sum_{i=1}^{n} r_i(t) f_i \ , \\ F_x(t) &:= |Tg_t(x)| \ , \\ G_{x,k}(t) &:= |T(2r_k(t)f_k - g_t)(x)| \ . \end{aligned}$$

Wegen der Sublinearität von T gilt dann für alle $t \in [0,1[,\ k \leq n$ und $\mu-$fast alle $x \in \Omega$:

$$2|Tf_k(x)| = |T(2r_k(t)f_k - g_t + g_t)(x)| \leq F_x(t) + G_{x,k}(t) \ .$$

Da nun F_x und $G_{x,k}$ nach Lemma 2.7 für fast alle $x \in \Omega$ gleichverteilt sind, folgt insgesamt für alle $k \leq n$ und $\mu-$fast alle $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda\ (t \in [0,1[\ |\ F_x(t) + G_{x,k}(t)\ \geq\ 2\ |Tf_k(x)|) \\ &\leq \lambda\ (t \in [0,1[\ |\ F_x(t)\ \geq\ |Tf_k(x)|)\ +\ \lambda\ (t \in [0,1[\ |\ G_{x,k}(t)\ \geq\ |Tf_k(x)|) \\ &= 2\ \lambda\ (t \in [0,1[\ |\ F_x(t)\ \geq\ |Tf_k(x)|)\ . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$1\ \leq\ 2\ \lambda(\ t \in [0,1[\ |\ F_x(t) \geq \max_{k \leq n} |Tf_k(x)|\ )$$

für μ-fast alle $x \in \Omega$. Da deswegen für μ-fast alle $x \in \Omega$ mit $\max_{k \leq n} |Tf_k(x)| \geq \delta$ gilt:

$$1\ \leq\ 2\ \lambda(\ t \in [0,1[\ |\ F_x(t) \geq \max_{k \leq n} |Tf_k(x)|\ )\ \leq\ 2\ \lambda(\ t \in [0,1[\ |\ F_x(t) \geq \delta\ )\ ,$$

folgt für $\mu-$fast alle $x \in \Omega$:

$$\chi_{\{\max_{k \leq n} |Tf_k| \geq \delta\}}(x) \quad \leq \quad 2\ \lambda(\ t \in [0,1[\ |\ F_x(t) \geq \delta)\ . \tag{2.4}$$

Damit ist eine der im weiteren Verlauf wichtigen Abschätzungen bewiesen. Um die andere zu zeigen, sei $c := b_p^p$ für $0 < p < 1$ und ansonsten $c := T_p(E)^p$. Es gilt dann wegen der Tschebyschew-Markowschen Ungleichung und Bemerkung 1.23 beziehungsweise der Definition des Typs:

$$\lambda(\ t \in [0,1[\ |\ \|g_t\|_E \geq \sqrt{\delta}\ ) \quad \leq \quad \delta^{-p/2} \int_0^1 \|g_t\|_E^p dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^{-p/2} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_E^p dt \\
&\leq c\delta^{-p/2} \sum_{i=1}^n \|f_i\|_E^p \\
&< c\varepsilon \ . \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Ungleichungen (2.4) und (2.5) und der Stetigkeit von T in 0 folgt nun insgesamt:

$$
\begin{aligned}
& \mu(\ x \in \Omega \mid \max_{k \leq n} |Tf_k(x)| \geq \delta\ ) \\
\leq\ & 2 \int_\Omega \lambda(\ t \mid F_x(t) \geq \delta\ )\ \mu(dx) \\
\leq\ & 2 \int_\Omega \lambda(\ t \mid F_x(t) \geq \sqrt{\delta}\ \|g_t\|_E\ )\ \mu(dx) + 2 \int_\Omega \lambda(\ t \mid \|g_t\|_E \geq \sqrt{\delta}\ )\ \mu(dx) \\
\leq\ & 2 \int_\Omega \int_0^1 \chi_{\{(x',t') \mid F_{x'}(t') \geq \sqrt{\delta}\ \|g_{t'}\|_E\}}(x,t)\ dt\ \mu(dx) + 2c\varepsilon \\
=\ & 2 \int_0^1 \mu(\ x \mid F_x(t) \geq \sqrt{\delta}\ \|g_t\|_E\ )\ dt + 2c\varepsilon \\
=\ & 2 \int_0^1 \mu\Big(\ x \mid \left| T\left(\|g_t\|_E^{-1} g_t \right)(x) \right| \geq \sqrt{\delta}\ \Big)\ dt + 2c\varepsilon \\
\leq\ & 2 \int_0^1 \varepsilon\ dt + 2c\varepsilon = 2(c+1)\varepsilon \ .
\end{aligned}
$$

Da diese Abschätzung unabhängig von n ist, gilt auch

$$
\mu(\ x \in \Omega \mid \sup_{n \geq 1} |Tf_n(x)| \geq \delta\ ) \ \leq\ 2(c+1)\varepsilon \ ,
$$

womit die Ungleichung (2.3) bewiesen ist. ◀

Zusammen mit Bemerkung 2.5 folgt nun sofort:

Korollar 2.9 (Nikishin) *Seien $0 < p < \infty$ und $q := min\{2, p\}$. Dann existiert zu jedem ν-sublinearen, in 0 stetigen Operator $T : L_p(\mu) \to L_o(\nu)$ ein Gewicht $w \in L_o^{>0}(\nu)$, so daß für alle $f \in L_p(\mu)$und $\alpha > 0$ gilt:*

$$
\int_{|Tf| \geq \alpha} w(x)\ d\nu(x) \ \leq\ \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha} \right)^q \quad .
$$

2.3 Ein Satz von Stein

Nachdem in den vorherigen beiden Abschnitten gezeigt wurde, daß jeder Operator $T : L_p(G) \to L_o(G)$ eine Ungleichung der Form

$$\int\limits_{|Tf|\geq\alpha} w(x)d\nu(x) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q \tag{2.6}$$

für geeignete w und q erfüllt, soll jetzt versucht werden, für bestimmte Klassen von Operatoren das Gewicht w durch eine Konstante $c > 0$ zu ersetzen. Die Stetigkeit im Maß impliziert für solche Operatoren dann den schwachen Typ (p, q). Obwohl die Sätze dieses Abschnittes ohne Vorbereitung bewiesen werden könnten, werden die benutzten Techniken in einem allgemeineren Rahmen vorgestellt, da dieser es gestatten wird, die Methoden für andere Problemstellungen zu modifizieren. Es sei daher jetzt schon auf die Abschnitte 2,3 und 4 des fünften Kapitels verwiesen.

Im folgenden sei $(G, \cdot)$ eine lokalkompakte Gruppe und γ ein linkes Haarmaß. Zusätzlich wird gefordert, daß γ $\sigma-$endlich und auch ein rechtes Haarmaß ist. Insbesondere ist G also unimodular. Falls G kompakt ist, soll zudem γ normalisiert sein. Man beachte dabei, daß kompakte Gruppen stets unimodular sind (vgl. [13], 15.13.). Die im folgenden wesentlichen Beispiele sind die lokalkompakten, nicht kompakten Gruppen

$$(\mathbb{R}^n, +, \lambda^n), \qquad (\mathbb{R}^+, \cdot, \lambda^+), \qquad (\mathsf{GL}(n), \cdot)$$

sowie die kompakten Gruppen

$$(\mathbb{T}, \cdot, \lambda_{\mathbb{T}}), \qquad (\mathsf{SO}(n), \cdot) \quad \text{und} \quad (\mathsf{ON}(n), \cdot)\ .$$

Diese Beispiele finden sich in ([13], 15.17. c), d), f), 15.28. a), sowie 4.25.). Die Berechung der Haarmaße auf den Matrizengruppen ist dabei für die weiteren Sätze unerheblich, es genügt ihre Existenz. Sind $f, g \in L_1(G)$, so ist die Faltung von f und g durch

$$f * g\ (x) :=\ \int_G f(y)\ g(y^{-1}x)\ \gamma(dy)$$

für fast alle $x \in G$ definiert (vgl. dazu [13], 20.10.).

Die Gruppe G *operiert* auf einer Menge Ω vermöge einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : G \times \Omega &\to \Omega \\ (x, \omega) &\mapsto x \cdot \omega\ , \end{aligned}$$

falls diese Verknüpfung $(xy) \cdot \omega = x \cdot (y \cdot \omega)$ und $1 \cdot \omega = \omega$ für alle $x, y \in G$ und $\omega \in \Omega$ erfüllt. Ist es klar, um welche Verknüpfung es sich handelt, wird $\cdot$ häufig auch weggelassen. Ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω, so kann es Maße μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ geben, die sich mit der Operation von G auf Ω „vertragen“. Eine genauere Beschreibung liefert die folgende Definition:

Definition 2.10 *Sind μ ein $\sigma-$endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ eine meßbare Funktion, so* operiert G Δ-invariant auf Ω vermöge $\cdot$, *falls G auf Ω vermöge $\cdot$ operiert, $\cdot$ meßbar ist und für alle $f \in L_o^{\geq 0}(\mu)$ und alle $x \in G$ gilt:*

$$\Delta(x) \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(x \cdot \omega)\mu(d\omega).$$

Für $\Delta \equiv 1$ wird ferner gesagt, daß G invariant *auf Ω operiert. In diesem Fall heißt μ auch $G-$invariant.*

Bevor die wichtigsten Beispiele Δ-invariant operierender Gruppen vorgestellt werden, sollen noch ein paar einfache Eigenschaften gezeigt werden:

Operiert G Δ-invariant auf Ω, so gilt für $f \in L_1^{\geq 0}(\mu)$ mit $\|f\|_1 = 1$ und alle $x, y \in G$:

$$\begin{aligned}
\Delta(xy) = \Delta(xy) \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) &= \int_\Omega f(xy\omega)\mu(d\omega) \\
&= \Delta(x) \int_\Omega f(y\omega)\mu(d\omega) \\
&= \Delta(x)\Delta(y) \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) \\
&= \Delta(x)\Delta(y) \ .
\end{aligned}$$

Die Funktion $\Delta : G \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ ist also ein Gruppenhomomorphismus. Da ferner $\Delta(x)\mu(\Omega) = \mu(x\Omega) = \mu(\Omega)$ für alle $x \in G$ gilt, muß im Fall $\mu(\Omega) < \infty$ die Gruppe G invariant auf Ω operieren. Ist nun $x \in G$, so gilt weiterhin für alle $0 < p < \infty$ und $f \in L_p(\mu, E)$:

$$\|f(x \cdot .)\|_p^p = \int_\Omega \|f(x\omega)\|_E^p \ \mu(d\omega) = \Delta(x) \int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p \ \mu(d\omega) = \Delta(x) \ \|f\|_p^p \ .$$

Damit ist für jedes $0 \leq p \leq \infty$ und alle $x \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned}
\tau_x : L_p(\mu, E) &\to L_p(\mu, E) \\
f &\mapsto f(x \cdot .)
\end{aligned}$$

definiert, stetig und linear. Ist $1 \leq p \leq \infty$ ferner $\tau_x'(f) = \Delta(x)\tau_{x^{-1}}(f)$ für alle $f \in L_{p'}(\mu, E')$. Es kann nun die im weiteren sehr wichtige Klasse der $G-$invarianten Abbildungen definiert werden:

Definition 2.11 *Sind $0 \leq p, q \leq \infty$ und G operiere Δ-invariant auf Ω, so heißt eine Abbildung $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, F)$ G*-invariant, *falls für alle $x \in G$ gilt:*

$$T \circ \tau_x = \tau_x \circ T \ .$$

Für $1 \leq p, q \leq \infty$ ist ein stetiger, linearer Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, F)$ mit $T'(L_{p'}(\mu, F')) \subset L_{q'}(\mu, E')$ demnach genau dann G-invariant, wenn es $T'_{|L_{p'}(\mu, F')}$ ist.

Beispiele 2.12 *Es werden nun ein paar Beispiele die Situation verdeutlichen.*

i.) *(G, γ) operiert invariant auf sich selber vermöge der Gruppenmultiplikation. $G-$invariante Operatoren werden* translationsinvariant *genannt.*

ii.) *Die Gruppe $\mathsf{GL}(n)$ operiert durch Anwendung von $A \in \mathsf{GL}(n)$ auf $x \in \mathbb{R}^n$ auf dem $\mathbb{R}^n$. Setzt man $\Delta(A) = |\det A|^{-1}$ für $A \in \mathsf{GL}(n)$, so kann mit der Transformationsformel (siehe z.B. [8], 17.5.) gezeigt werden, daß sie Δ-invariant auf $\mathbb{R}^n$ operiert.*

iii.) *Betrachtet man die Untergruppen $\mathsf{ON}(n)$ und $\mathsf{SO}(n)$ von $\mathsf{GL}(n)$, so operieren diese sogar invariant auf dem $\mathbb{R}^n$. Im Fall $n \geq 2$ heißen $\mathsf{SO}(n)$-invariante Operatoren* rotationsinvariant. *Für $n = 1$ heißen $\mathsf{ON}(1)$-invariante Operatoren* rotationsinvariant.

iv.) *Auf dem $\mathbb{R}^n$ operiert ferner $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ vermöge der Skalarmultiplikation. Setzt man $\Delta(t) = t^{-n}$ für $t \in \mathbb{R}^+$, so ist diese Operation Δ-invariant. Die $\mathbb{R}^+$-invarianten Operatoren heißen* dilatationsinvariant.

Bemerkung 2.13 *Operiert G Δ-invariant auf (Ω, μ) und ist $\Delta \neq 1$, so gibt es im Fall $0 < p \neq q < \infty$ keinen nichttrivialen Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, F)$, der $\mu-$homogen, $G-$invariant und stetig in 0 ist.*

Beweis: Ist $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, F)$ ein $\mu-$homogener, $G-$invarianter und in 0 stetiger Operator, so gilt für $f \in L_q(\mu, E)$:

$$\|Tf\|_p = \Delta(x)^{-1/p} \|\tau_x T f\|_p \leq \Delta(x)^{-1/p} \|T\| \; \|\tau_x f\|_q = \Delta(x)^{1/q-1/p} \|T\| \; \|f\|_q \; .$$

Ist dann $x_o \in G$ mit $\Delta(x_o) \neq 1$, so ist entweder $\Delta(x_o)^{1/q-1/p} < 1$ oder $\Delta(x_o^{-1})^{1/q-1/p} = \Delta(x_o)^{1/p-1/q} < 1$. In beiden Fällen folgt aus der obigen Ungleichung notwendigerweise $T = 0$. ◄

Die letzte Bemerkung entmutigt zunächst etwas. Die Beispiele aus 2.12 werden jedoch im Laufe der Arbeit die vorangegangenen Definitionen noch rechtfertigen.

Um für $G-$invariante, stark durch $L_{q,\infty}(\mu)$ faktorisierende Operatoren die resultierenden Gewichte näher zu bestimmen, bedarf es noch einer kleinen Überlegung: Für $0 < p \leq \infty$ und $0 < q < \infty$ sei dazu $T : L_p(\mu) \to L_o(\mu)$ ein $\mu-$sublinearer und G-invarianter Operator, der stark durch $L_{q,\infty}(\mu)$ faktorisiert. Nach Bemerkung 2.5 gibt es dann ein Gewicht $w \in L_o^{>0}(\mu)$, das die Ungleichung (2.6) erfüllt. Da für $f \in L_p(\mu)$, $y \in G$ und $\alpha > 0$ weiterhin

$$y^{-1}\{\omega \in \Omega |\, |Tf(\omega)| \geq \alpha\} = \{\omega |\, |Tf(y\omega)| \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega |\, |T(\tau_y f)(\omega)| \geq \alpha\}$$

gilt, folgt dann:

$$\begin{aligned} \int\limits_{|Tf|\geq\alpha} w(y^{-1}\omega)\ \mu(d\omega) &= \Delta(y^{-1}) \int\limits_{y^{-1}\{|Tf|\geq\alpha\}} w(\omega)\ \mu(d\omega) \\ &= \Delta(y)^{-1} \int\limits_{|T(\tau_y f)|\geq\alpha} w(\omega)\ \mu(d\omega) \\ &\leq \Delta(y)^{-1} \left(\frac{\|\tau_y f\|_p}{\alpha}\right)^q \\ &= \Delta(y)^{\frac{q}{p}-1} \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mit dieser Ungleichung kann nun das Ziel diese Abschnittes leicht bewiesen werden:

Satz 2.14 *Sind $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ und $T : L_p(G) \to L_o(G)$ ein γ-sublinearer, translationsinvarianter, in 0 stetiger Operator, der stark durch $L_{q,\infty}(G)$ faktorisiert, so existiert ein $w \in C(G)$ mit $w > 0$, so daß für alle $f \in L_p(G)$ und $\alpha > 0$ gilt:*

$$\int\limits_{|Tf|\geq\alpha} w(x)\ \gamma(dx) \ \leq \ \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q . \tag{2.8}$$

Ist insbesondere G kompakt, so ist T vom schwachen Typ (p, q).

Beweis: Wie eben bemerkt, gibt es ein Gewicht $\tilde{w} \in L_o^{>0}(G)$, so daß für alle $f \in L_p(G)$, $y \in G$ und $\alpha > 0$ die Ungleichung

$$\int\limits_{|Tf|\geq\alpha} \tilde{w}(y^{-1}x)\ \gamma(dx) \ \leq \ \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q$$

erfüllt ist. Es ist ferner klar, daß ohne Einschränkung $\tilde{w} \in L_\infty^{>0}(G)$ angenommen werden kann. Ist nun $h \in L_1^{>0}(G)$ mit $\|h\|_1 = 1$, so ist $w := h * \tilde{w} > 0$ und stetig nach ([13], 20.16.). Für alle $f \in L_p(G)$ und $\alpha > 0$ gilt dann insgesamt:

$$\int\limits_{|Tf|\geq\alpha} w(x)\ \gamma(dx) \ = \ \int\limits_G h(y) \int\limits_{|Tf|\geq\alpha} \tilde{w}(y^{-1}x)\ \gamma(dx)\ \gamma(dy)$$

$$\begin{aligned} &\le \int\limits_G \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q h(y)\ \gamma(dy) \\ &= \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q . \end{aligned}$$

Ist G kompakt, so kann w durch $c := \min\{w(x) \mid x \in G\} > 0$ ersetzt werden. Damit ist dann T vom schwachen Typ (p,q) mit $\|T : L_p(G) \to L_{q,\infty}(G)\| \le c^{-1}$. ◀

Mit Hilfe von 2.9 und 2.6 folgt nun sofort:

Korollar 2.15 *Sind $0 < p < \infty$, G kompakt und $T : L_p(G) \to L_o(G)$ ein $\gamma-$sublinearer, in 0 stetiger und translationsinvarianter Operator, so ist T in den folgenden Fällen vom schwachen Typ (p,q):*

i.) $q = \min\{2,p\}$.

ii.) $q = p$, *falls T auch monoton ist.*

Ist $G = \mathbb{R}^n$, so ist ein im Maß stetiger Operator nicht automatisch vom schwachen Typ (p,q). Unter zusätzlichen Annahmen an den Operator ist diese Schlußfolgerung jedoch möglich, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 2.16 *Sind $0 < p < \infty$ und $T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_o(\mathbb{R}^n)$ ein λ^n-sublinearer, translations- und dilatationsinvarianter, in 0 stetiger Operator, so gelten die folgenden Implikationen:*

i.) Faktorisiert T stark durch $L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, so ist T vom schwachen Typ (p,p).

ii.) Faktorisiert T stark durch $L_{p+\varepsilon,\infty}(\mathbb{R}^n)$ für ein $\varepsilon > 0$, so ist $T = 0$.

Beweis: Faktorisiert T stark durch $L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ für $q \ge p$, so existiert nach Satz 2.14 ein $w \in C(G)$ mit $w > 0$, das die Ungleichung (2.8) für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ und alle $\alpha > 0$ erfüllt. Da T dilatationsinvariant ist, folgt dann mit der Ungleichung (2.7) und dem Lemma von Fatou für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ und alle $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{|Tf|\ge\alpha} w(0)\ dx &= \int\limits_{|Tf|\ge\alpha} \liminf_{i\to\infty} w(i^{-1}x)\ dx \\ &\le \liminf_{i\to\infty} \int\limits_{|Tf|\ge\alpha} w(i^{-1}x)\ dx \\ &\le \liminf_{i\to\infty}\ i^{n(1-q/p)} \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^q . \end{aligned}$$

Ist nun $q = p$, so folgt $\liminf_{i\to\infty} i^{n(1-q/p)} = 1$, und damit ist T wegen $w(0) > 0$ vom schwachen Typ (p,p). Andernfalls ist $\liminf_{i\to\infty} i^{n(1-q/p)} = 0$ und damit folgt $\|Tf\|_{q,\infty} = 0$ für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, das heißt $T = 0$. ◀

Zum Schluß soll noch ein Satz vorgestellt werden, der ein typisches Anwendungsmuster der letzten Sätze verdeutlicht:

Satz 2.17 *Seien G eine kompakte Gruppe, $0 < p \leq 2$ und $T_n : L_p(G) \to L_o(G)$ stetig, linear sowie translationsinvariant. Existiert dann ein dichter Teilraum $E \subset L_p(G)$, so daß für alle $f \in E$ die Folge $(T_n(f(x))$ für γ-fast alle $x \in G$ konvergiert, so sind äquivalent:*

i.) Für alle $f \in L_p(G)$ konvergiert die Folge $(T_n(f(x))$ für γ-fast-alle $x \in G$

ii.) Für alle $f \in L_p(G)$ ist die Folge $(T_n(f(x))$ für γ-fast-alle $x \in G$ beschränkt.

iii.) Der maximale Operator T^* der T_n ist vom schwachen Typ (p,p).

Beweis: zu *ii.)* $\to$ *iii.)* : Nach Proposition 1.10 ist der maximale Operator T^* von $L_p(G)$ nach $L_o(G)$ definiert und stetig in 0. Nach Korollar 2.15 folgt dann die Behauptung.
iii.) $\to$ *i.)* : Sind $f \in L_p(G)$ und $\varepsilon, \delta > 0$, so existiert ein $g \in E$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon\delta/4$. Nach Voraussetzung gilt ferner:

$$\mu(\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |T_n g - T_m g| \geq \varepsilon/2) = 0 \ .$$

Mit $h := f - g$ folgt damit:

$$\begin{aligned}
& \mu\Big(\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |T_n f - T_m f| \geq \varepsilon\Big) \\
\leq \ & \mu\Big(\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} (|T_n h - T_m h| + |T_n g - T_m g|) \geq \varepsilon\Big) \\
\leq \ & \mu\Big(\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |T_n h - T_m h| \geq \varepsilon/2\Big) + \mu\Big(\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |T_n g - T_m g| \geq \varepsilon/2\Big) \\
\leq \ & \mu\Big(\sup_{n\geq 1} |T_n h| + \sup_{m\geq 1} |T_m h| \geq \varepsilon/2\Big) \\
= \ & \mu\Big(|T^* h| \geq \varepsilon/4\Big) \\
\leq \ & 2c\left(\frac{4\|h\|_p}{\varepsilon}\right)^p < 2c\delta^p \ .
\end{aligned}$$

Also ist $\mu(\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} |T_n f - T_m f| \geq \varepsilon) = 0$. Damit ist aber $(T_n f(x))$ für μ-fast-alle $x \in G$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, womit *i.)* bewiesen ist.
Die Implikation *i.)* $\to$ *ii.)* ist trivial. ◀

2.4 Bemerkungen und Ausblicke

Aus Satz 2.17 kann leicht eine Charakterisierung derjenigen $p \in [1, 2]$ gewonnen werden, für die die Fourierreihe einer jeden Funktion $f \in L_p(\mathbb{T})$ fast überall konvergiert: Bezeichnet $S_n f$ die $n-$te Partialsumme der Fourierreihe von f, so konvergiert $S_n f$ genau dann nach Satz 2.17 fast überall gegen f für jedes $f \in L_p(\mathbb{T})$, wenn der maximale Operator der S_n vom schwachen Typ (p, p) ist. Diese Charakterisierung geht auf Calderón zurück und wurde von Zygmund in ([36], S. 165) präsentiert. Bekanntlich haben Carleson 1966 für $p = 2$ und kurz danach Hunt für $1 < p < 2$ gezeigt, daß die Fourierreihen fast überall konvergieren. Dagegen hatte Kolmogorov schon 1926 eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{T})$ angegeben, für die die Fourierreihe überall divergiert. Der Satz 2.17 geht auf eine Arbeit von Stein aus dem Jahre 1961 zurück (Siehe [28], Satz 1). Mit Hilfe des Satzes zeigt Stein in dieser Arbeit unter anderem relativ schnell die Existenz einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{T})$, deren Fourierreihe fast überall divergiert (Siehe [28], Satz 6). Zudem wird ein zu $\Delta-$invarianten Maßen verwandtes Konzept benutzt: Ist G eine kompakte Gruppe, Ω ein kompakter Hausdorff-Raum und die Operation von G auf Ω stetig und transitiv, so existiert genau ein invariantes, reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf Ω. Ein Beweis dieser Tatsache findet sich in ([6], 19.9). Bezüglich solcher Operationen und Maße μ gilt dann der Satz 2.17 nach Stein für $G-$invariante Operatoren.

Die Aussage 2.9 wurde 1970 von Nikishin bewiesen. Der in diesem Kapitel eingeschlagene Weg des Beweises ist aus ([9], VI.1.7., 2.4. und 2.7.) sowie ([34], III.H.5. und 6.) entnommen. Eine eher geschichtlich orientierte Entwicklung der Sätze findet sich zudem in ([12], Kapitel 2).

Eine Reihe von Anwendungen für die Sätze dieses Kapitels finden sich in ([9], VI.2.10.) sowie übersichtsartig in ([10], Part II).

Kapitel 3

Vektorwertige Ungleichungen

Zur Vorbereitung auf die nächsten Kapitel wird in diesem Kapitel untersucht, wann es zu einem $\nu-$homogenen Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ und einem $0 < r < \infty$ ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle endlichen Folgen $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ gilt:

$$\left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r)^{p/r} \nu(dy) \right)^{1/p} \leq c \left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \|f_i(x)\|_E^r)^{q/r} \mu(dx) \right)^{1/q} . \qquad (3.1)$$

Im ersten Abschnitt wird zunächst diese Ungleichung interpretiert. Sodann werden einfache Beispiele vorgestellt und die Wirkung von Multiplikationsoperatoren hinsichtlich dieser Ungleichung untersucht. Schließlich werden duale und im Falle $E = F = \mathbb{R}$ positive, lineare Operatoren behandelt.
In einigen Fällen erfüllt jeder stetiger Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ die Ungleichung (3.1). Solche Fälle werden mit Hilfe des Typs und Kotyps der Räume E und F in den folgenden Abschnitten aufgezeigt. Der zweite Abschnitt behandelt dabei den Fall $r = 2$, der dritte Abschnitt den Fall $r \neq 2$.

3.1 Einfache Eigenschaften und Beispiele

Die Ungleichung (3.1) wird in diesem Abschnitt als gleichmäßige Beschränktheit von T zugeordneter Abbildungen interpretiert. Anschließend werden einfache, aber fundamentale Beispiele von Operatoren, die die Ungleichung erfüllen, vorgestellt. Danach wird die Wirkung von Multiplikationsoperatoren auf die zugrunde gelegten Indizes p und q untersucht und die „Dualisierung“ der Ungleichung (3.1) behandelt. Zuletzt wird gezeigt, daß positive Operatoren die Ungleichung (3.1) stets erfüllen.

Um im weiteren einfacher reden zu können, wird die folgende Sprechweise eingeführt:

Definition 3.1 *Sind* $0 < p, q \leq \infty$, $0 < r < \infty$ *und* $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ *eine* $\nu-$*homogene Abbildung, so wird mit* $\mathsf{m}_r(T)$ *das Infimum* *aller $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet, für die für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ die Ungleichung*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i(.)\|_F^r\right)^{1/r} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i(.)\|_E^r\right)^{1/r} \right\|_q$$

erfüllt ist. Ist $\mathsf{m}_r(T) < \infty$, so wird gesagt, daß T eine Marcinkiewicz-Zygmund- *oder* vektorwertige Ungleichung in r *einhält.*

Ist $\mathsf{m}_r(T) < \infty$, so muß T notwendigerweise in 0 stetig sein und $\|T\| \leq \mathsf{m}_r(T)$ gelten. Eine Umkehrung gilt jedoch nicht, wie zum Beispiel die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ im Fall $r = 1$ zeigt (siehe hierzu [4] 7.5., S.83f). Analog könnte auch $\mathsf{m}_\infty(.)$ definiert werden, in Hinblick auf die zentralen Sätze 4.3 und 4.7 des nächsten Kapitels erweist sich der Fall $r = \infty$ für diese Arbeit jedoch als überflüssig. Sind $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$, so ist $(f_1, \ldots, f_n) \in L_q(\mu, \ell_r^n(E))$, und es gilt:

$$\|(f_1, \ldots, f_n)\|_{L_q(\mu, \ell_r^n(E))} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i(x)\|_E^r\right)^{q/r} \mu(dx) \right)^{1/q} .$$

Da sich jedes $f \in L_q(\mu, \ell_r^n(E))$ eindeutig durch ein solches n-Tupel von Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ darstellen läßt, ist für einen $\nu-$homogenen Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ jede der Abbildungen

$$\begin{aligned} T^{(n)} : L_q(\mu, \ell_r^n(E)) &\to L_p(\nu, \ell_r^n(F)) \\ (f_1, \ldots, f_n) &\mapsto (Tf_1, \ldots, Tf_n) \end{aligned}$$

definiert. Ferner ist klar, daß $\mathsf{m}_r(T) = \sup_n \left\|T^{(n)}\right\|$ ist, und $\mathsf{m}_r(T)$ genau dann endlich ist, wenn die $T^{(n)}$ gleichmäßig beschränkt sind.

Beispiele 3.2 *Die folgenden beiden Beispiele sind zwar elementar, jedoch für den weiteren Verlauf sehr wichtig, da sie später im Satz 4.3 als „Grundtypen“ von Operatoren mit $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ identifiziert werden.*

i.) Sind $1 \leq q < \infty$ und $T : L_q(\mu, E) \to L_q(\nu, F)$ $\nu-$homogen und stetig in 0, so gilt für alle $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$

$$\begin{aligned} \left(\int_O \left(\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i(y)\|_F^q\right)^{q/q} \nu(dy) \right)^{1/q} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \int_O \|Tf_i(y)\|_F^q \nu(dy) \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|T\|^q \int_\Omega \|f_i(x)\|_E^q \mu(dx) \right)^{1/q} \\ &= \|T\| \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i(x)\|_E^q\right)^{q/q} \mu(dx) \right)^{1/q} , \end{aligned}$$

das heißt, es ist $\mathsf{m}_q(T) = \|T\|$.

ii.) Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ und $M_g : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, E)$ für $g \in L_\alpha(\mu)$. Es ist dann $M_g^{(n)} : L_q(\mu, \ell_r^n(E)) \to L_p(\mu, \ell_r^n(E))$ wieder ein Multiplikationsoperator von g, der mit M bezeichnet wird. Wegen $\|M\| = \|g\|_\alpha$ folgt somit $\mathsf{m}_r(M_g) = \|M_g\|$.

Das folgende Lemma erleichtert häufig die Arbeit mit vektorwertigen Ungleichungen der Form (3.1).

Lemma 3.3 *Sind $0 < p_1 \leq p < \infty$ sowie $0 < q \leq q_1 < \infty$, und setzt man*

$$\frac{1}{\alpha_1} := \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} , \quad \frac{1}{\alpha_2} := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} ,$$

so sind für jeden ν-homogenen Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ und jedes $0 < r < \infty$ äquivalent:

i.) $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$.

ii.) Für alle $g_1 \in L_{\alpha_1}^{\geq 0}(\mu)$ und alle $g_2 \in L_{\alpha_2}^{\geq 0}(\nu)$ mit $\|g_1\|_{\alpha_1} = \|g_2\|_{\alpha_2} = 1$ gilt:

$$\mathsf{m}_r(M_{g_2} T M_{g_1}) \leq 1 .$$

Ist dabei eines der $\alpha_i = \infty$, so ist es hinreichend, in der zweiten Bedingung $g_i \equiv 1$ zu fordern.

Beweis: i.) $\to$ *ii.)* : Da $\mathsf{m}_r(M_{g_1}) = \mathsf{m}_r(M_{g_2}) = 1$ ist, folgt diese Implikation wegen $\|(M_{g_2} T M_{g_1})^{(n)}\| \leq \|T^{(n)}\|$.
ii.) $\to$ *i.)* : Sind $f_1, \dots, f_n \in L_q(\mu, E)$, so existieren nach Lemma 1.16 $g_1 \in \mathcal{W}_{\alpha_1}^1(\mu)$ und $g_2 \in \mathcal{W}_{\alpha_2}^1(\nu)$, so daß

$$\left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \|f_i(x)\|_E^r)^{q_1/r} g_1^{-q_1}(x) \mu(dx) \right)^{1/q_1} = \left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \|f_i(x)\|_E^r)^{q/r} \mu(dx) \right)^{1/q}$$

und

$$\left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r)^{p_1/r} g_2^{p_1}(y) \nu(dy) \right)^{1/p_1} = \left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r)^{p/r} \nu(dy) \right)^{1/p}$$

gilt. Dabei ist zu beachten, daß für $\alpha_i = \infty$ die entsprechende Gleichheit leicht durch $g_i \equiv 1$ realisiert werden kann. Ferner ist für alle $1 \leq j \leq n$

$$g_1^{-1} \|f_j(.)\|_E \leq g_1^{-1} (\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r)^{1/r} \in L_{q_1}(\mu)$$

und damit $g_1^{-1} f_j \in L_{q_1}(\mu, E)$. Mit der Voraussetzung gilt dann

$$\begin{aligned}
& \left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r)^{p/r} \nu(dy) \right)^{1/p} \\
= & \left(\int_O (\sum_{i=1}^n \left\|g_2(y)T(g_1(g_1^{-1}f_i))(y)\right\|_F^r)^{p_1/r} \nu(dy) \right)^{1/p_1} \\
\leq & \left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \left\|g_1^{-1}(x)f_i(x)\right\|_E^r)^{q_1/r} \mu(dx) \right)^{1/q_1} \\
= & \left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \|f_i(x)\|_E^r)^{q/r} \mu(dx) \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

das heißt, es folgt insgesamt $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$. Insbesondere ist der Zusatz für $\alpha_i = \infty$ bewiesen, da in diesem Fall nur das Gewicht $v_i \equiv 1$ für die Implikation benötigt wird. ◀

Die Implikation *ii.*) $\to$ *i.*) ermöglicht es in bestimmten Situationen, die zu betrachtenden Räume „anzupassen". Dies wird sowohl in den nächsten Abschnitten, als auch im folgenden Kapitel eine wichtige Rolle spielen.

In Lemma 1.2 wurde gezeigt, daß sich $L_{p'}(\mu, E')$ in $L_p(\mu, E)'$ normgleich einbetten läßt. Dies gilt also insbesondere auch für $L_{p'}(\mu, \ell_r^n(E)')$ in $L_p(\mu, \ell_r^n(E))'$. Da sich $\ell_r^n(E)'$ wiederum durch $\ell_{r'}^n(E')$ darstellen läßt, kann diese Einbettung konkretisiert werden:

Lemma 3.4 *Sind* $1 \leq p, r \leq \infty$ *und* $n \in \mathbb{N}$, *so sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
L_{p'}(\mu, \ell_{r'}^n(E')) & \to L_p(\mu, \ell_r^n(E))' \\
(f_1', \ldots, f_n') & \mapsto \left((f_1, \ldots, f_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \int_\Omega \langle f_i'(x), f_i(x) \rangle_{E',E} \ \mu(dx) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
L_p(\mu, \ell_r^n(E)) & \to L_{p'}(\mu, \ell_{r'}^n(E'))' \\
(f_1, \ldots, f_n) & \mapsto \left((f_1', \ldots, f_n') \mapsto \sum_{i=1}^n \int_\Omega \langle f_i'(x), f_i(x) \rangle_{E',E} \ \mu(dx) \right)
\end{aligned}$$

lineare, metrische Injektionen.

Beweis: Die Abbildung

$$\begin{aligned}
I_1 : \ell_{r'}^n(E') & \to \ell_r^n(E)' \\
(y_1', \ldots, y_n') & \mapsto \left((y_1, \ldots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \langle y_i', y_i \rangle_{E',E} \right)
\end{aligned}$$

ist eine metrische Bijektion. Damit ist auch die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} I_2 : L_{p'}(\mu, \ell^n_{r'}(E')) & \to & L_{p'}(\mu, \ell^n_r(E)') \\ (f'_1, \dots, f'_n) & \mapsto & (x \mapsto I_1 ((f'_1(x), \dots, f'_n(x)))) \end{array}$$

eine metrische Bijektion. Bezeichnet nun $F := \ell^n_r(E)$ und I_3 die in Lemma 1.2 vorgestellte metrische Injektion von $L_{p'}(\mu, F')$ nach $L_p(\mu, F)'$, so ist $I_4 := I_3 \circ I_2$ wieder eine metrische Injektion. Da für $(f'_1, \dots, f'_n) \in L_{p'}(\mu, \ell^n_{r'}(E'))$ und $(f_1, \dots, f_n) \in L_p(\mu, \ell^n_r(E))$ zudem gilt:

$$\begin{aligned} & I_4 ((f'_1, \dots, f'_n)) ((f_1, \dots, f_n)) \\ = \; & I_3 (I_2((f'_1, \dots, f'_n))) ((f_1, \dots, f_n)) \\ = \; & \int_\Omega \langle I_2 ((f'_1, \dots, f'_n)) (x), (f_1, \dots, f_n)(x) \rangle_{F',F} \; \mu(dx) \\ = \; & \int_\Omega \langle I_1 ((f'_1(x), \dots, f'_n(x))) , (f_1(x), \dots, f_n(x)) \rangle_{\ell^n_r(E)', \ell^n_r(E)} \; \mu(dx) \\ = \; & \sum_{i=1}^n \int_\Omega \langle f'_i(x), f_i(x) \rangle_{E',E} \; \mu(dx), \end{aligned}$$

ist die erste Behauptung bewiesen. Die zweite Gleichung kann, wenn man die Einbettungen

$$L_p(\mu, \ell^n_r(E)) \hookrightarrow L_p(\mu, \ell^n_r(E'')) \hookrightarrow L_{p'}(\mu, \ell^n_{r'}(E'))'$$

bedenkt, analog bewiesen werden. ◀

Um aufwendige Notationen zu vermeiden, wird im weiteren der Raum $L_{p'}(\mu, E')$ als ein *Teilraum* von $L_p(\mu, E)'$ angesehen. Der nächste Satz zeigt nun, daß unter einer „vernünftigen“ Dualitätsbedingung ein Operator genau dann eine vektorwertige Ungleichung in r erfüllt, wenn sein dualer Operator eine solche für r' einhält.

Satz 3.5 *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$, $1 \leq r < \infty$ und $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ linear und stetig mit $T'(L_{p'}(\nu, F')) \subset L_{q'}(\mu, E')$. Dann sind äquivalent:*

i.) $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$;

ii.) $\mathsf{m}_{r'}(T'_{|L_{p'}(\nu, F')}) \leq 1$, *das heißt, für alle $f_1, \dots, f_n \in L_{p'}(\nu, F')$ gilt:*

$$\left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \|T' f_i(x)\|^{r'}_{E'})^{q'/r'} \mu(dx) \right)^{1/q'} \leq \left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|f_i(y)\|^{r'}_{F'})^{p'/r'} \nu(dy) \right)^{1/p'} .$$

Beweis: i.) $\to$ *ii.)* Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt nach Voraussetzung $\left\|T^{(n)}\right\| \leq 1$ und damit auch $\|T^{(n)\prime}\| \leq 1$. Ist nun $(f'_i) \in L_{p'}(\nu, \ell^n_{r'}(F'))$, so ist nach

Voraussetzung $T'^{(n)}((f_i')) \in L_{q'}(\mu, \ell_{r'}^n(E'))$ und für $(f_i) \in L_q(\mu, \ell_r^n(E))$ gilt mit der ersten Einbettung aus Lemma 3.4:

$$\langle T'^{(n)}((f_i')), (f_i)\rangle = \sum_{i=1}^n \langle T' f_i', f_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle f_i', T f_i\rangle = \langle (f_i'), T^{(n)}((f_i))\rangle \ .$$

Also ist $(T^{(n)})'((f_i')) = T'^{(n)}((f_i'))$ für alle $(f_i') \in L_{p'}(\nu, \ell_{r'}^n(F'))$, womit insgesamt $\|(T'_{|L_{p'}(\nu, F')})^{(n)}\| \leq 1$ folgt.
ii.) $\to$ *i.)* Diese Implikation kann analog mit der zweiten Einbettung aus Lemma 3.4 bewiesen werden. ◀

Es wird abschließend gezeigt, daß monotone, lineare und stetige Operatoren immer eine Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung in r erfüllen.

Proposition 3.6 *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ und $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ eine stetige, lineare und monotone Abbildung, so gilt für alle $1 \leq r < \infty$:*

$$\mathsf{m}_r(T) = \|T\| \,.$$

Beweis: Ist B eine abzählbare und dichte Teilmenge der Einheitskugel von $\ell_{r'}^n$, so gilt für $(x_i) \in \ell_r^n$ nach dem Satz von Hahn-Banach:

$$(\sum_{i=1}^n |x_i|^r)^{1/r} = \sup\{ \ |\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i| \mid (\alpha_i) \in B\}$$

Sind dann $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu)$, so folgt für alle $(\alpha_i) \in \ell_{r'}^n$ mit $\|(\alpha_i)\|_{r'} \leq 1$ und $\mu-$fast alle $\omega \in \Omega$:

$$|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\omega)| \leq (\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^r)^{1/r}.$$

Mit der Monotonie und Linearität von T gilt damit für $\nu-$fast alle $y \in O$:

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^n |Tf_i(y)|^r)^{1/r} &= \sup\{|(\sum_{i=1}^n \alpha_i T f_i)(y)| \mid (\alpha_i) \in B\} \\
&= \sup\{|T(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)|(y) \mid (\alpha_i) \in B\} \\
&\leq \sup\{T(|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i|)(y) \mid (\alpha_i) \in B\} \\
&\leq T((\sum_{i=1}^n |f_i|^r)^{1/r})(y).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt deswegen:

$$\left(\int_O (\sum_{i=1}^n |Tf_i|^r)^{p/r} d\nu\right)^{1/p} \leq \left(\int_O \left|T\Big((\sum_{i=1}^n |f_i|^r)^{1/r}\Big)\right|^p d\nu\right)^{1/p}$$
$$\leq \|T\| \left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n |f_i|^r)^{q/r} d\mu\right)^{1/q} . \quad \blacktriangleleft$$

3.2 Vektorwertige Ungleichungen für $r = 2$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß für $1 \leq p, q < \infty$ jeder lineare und stetige Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ eine Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung in 2 erfüllt, sofern E vom Typ 2 und F vom Kotyp 2 ist. Im Fall $E = F = \mathbb{R}$ wird ferner $\mathsf{m}_2(T)$ genauer abgeschätzt und mit Hilfe der Grothendieckschen Ungleichung auch der Fall $p = 1, q = \infty$ behandelt.

Satz 3.7 *Sind $1 \leq p, q < \infty$, E ein Banachraum vom Typ 2 und F ein Banachraum vom Kotyp 2, so gilt für jeden stetigen und linearen Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$:*

$$\mathsf{m}_2(T) \leq C_2(F)\ T_2(E)\ K_2\ K_{q_1}\ \|T\|,$$

wobei $q_1 := \max\{2, q\}$ ist.

Beweis: Es wird zunächst der Fall $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$ bewiesen. Sind dazu $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$, so gilt:

$$\left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^2)^{p/2} \nu(dy)\right)^{1/p}$$
$$\leq C_2(F) \left(\int_O \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) Tf_i(y)\right\|_F^2 dt\right)^{p/2} \nu(dy)\right)^{1/p}$$
$$\leq C_2(F)\ K_2 \left(\int_0^1 \int_O \left\|T\left(\sum_{i=1}^n r_i(t) f_i\right)(y)\right\|_F^p \nu(dy)\ dt\right)^{1/p}$$
$$\leq C_2(F)\ K_2\ \|T\| \left(\int_0^1 \left(\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(x)\right\|_E^q \mu(dx)\right)^{p/q} dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \; C_2(F)\; K_2\; \|T\| \left(\int_0^1 \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(x) \right\|_E^q \mu(dx)\; dt \right)^{1/q}$$

$$\leq \; C_2(F)\; K_2\; K_q\; \|T\| \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(x) \right\|_E^2 dt \right)^{q/2} \mu(dx) \right)^{1/q}$$

$$\leq \; C_2(F)\; T_2(E)\; K_2\; K_q\; \|T\| \left(\int_\Omega (\sum_{i=1}^n \|f_i(x)\|_E^2)^{q/2} \mu(dx) \right)^{1/q} .$$

Seien nun $1 \leq p, q < \infty$, $p_1 := \min\{2, p\}$ und $\frac{1}{\alpha_1} := \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}$, $\frac{1}{\alpha_2} := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}$. Für $g_1 \in L_{\alpha_1}^{\geq 0}(\mu), g_2 \in L_{\alpha_2}^{\geq 0}(\nu)$ mit $\|g_1\|_{\alpha_1} = \|g_2\|_{\alpha_2} = 1$ erfüllt dann der Operator

$$L_{q_1}(\mu, E) \xrightarrow{M_{g_1}} L_q(\mu, E) \xrightarrow{T} L_p(\nu, F) \xrightarrow{M_{g_2}} L_{p_1}(\nu, F)$$

wegen des schon bewiesenen Falles

$$\mathsf{m}_2(M_{g_2} T M_{g_1}) \leq C_2(F)\; T_2(E)\; K_2\; K_{q_1}\; \|T\| \,.$$

Nach Lemma 3.3 ist damit die Behauptung insgesamt bewiesen. ◀

Der Satz 3.7 wurde im Fall $E = F = \mathbb{R}$ und $0 < p, q < \infty$ schon von Marcinkiewicz und Zygmund mit Hilfe von Gaußfolgen bewiesen (siehe dazu [9], V.2.7., S.484f.). Auf diese Weise entsteht eine andere Abschätzung von $\mathsf{m}_2(T)$, die für $0 < q \leq p < \infty$ beispielsweise

$$\mathsf{m}_2(T) = \|T\|$$

ergibt. Im Satz 3.7 ist der extreme Fall $q = \infty$ und $p = 1$ bedauerlicherweise ausgeschlossen. Für den skalarwertigen Fall kann dieser jedoch mit Hilfe der Grothendieck-Ungleichung bewiesen werden:

Satz 3.8 *Ist $T : L_\infty(\mu) \to L_1(\nu)$ ein stetiger, linearer Operator, so gilt:*

$$\mathsf{m}_2(T) \leq K_G\; \|T\|$$

Dabei bezeichnet K_G die sogenannte Grothendieck-Konstante.

Die Behauptung kann zunächst für Operatoren $T : \ell_\infty^n \to \ell_1^n$ mit der Grothendieck-Ungleichung bewiesen werden. Durch „lokale Techniken“ kann dann im zweiten Schritt der Fall $T : L_\infty(\mu) \to L_1(\nu)$ gezeigt werden (vgl. dazu die Schritte 1 und 2 des Beweises von [18] Vol. II, Satz 1.f.14., S.93f.). Ein anderer Beweis findet sich in ([4] 26.3.).

Mit Lemma 3.3 ermöglicht der letzte Satz auch eine bessere Abschätzung von $\mathsf{m}_2(T)$ für lineare und stetige Operatoren $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ im allgemeinen Fall $1 \le p, q \le \infty$.

3.3 Der Fall $r \neq 2$

Analog zum vorigen Abschnitt werden jetzt Abschätzungen von $\mathsf{m}_r(T)$ für $r \neq 2$ mit Hilfe von *Struktureigenschaften* von E und F gewonnen. Dafür wird jedoch ein „Typ"-Begriff benötigt, der nicht auf der Rademacher-Mittelung beruht. Zuerst werden daher geeignete Maße zur Mittelung vorgestellt.

Ist μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so bezeichnet $\hat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ die für alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\hat{\mu}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \mu(dy)$$

definierte, aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannte, *charakteristische Funktion* von μ. Gilt $\hat{\mu}(.) = \exp(-|.|^p)$, so heißt das Maß *p-stabil.* Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, so wird eine meßbare Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *p-stabil* genannt, falls ihr Bildmaß $f(\mu)$ dies ist. Die Existenz p-stabiler Maße sichert der folgende Satz, dessen Beweis man zum Beispiel in ([4], 24.2. und 24.3.) findet.

Satz 3.9 *Für $0 < p \le 2$ existiert genau ein p-stabiles Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.*

Im weiteren wird *das* p-stabile Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit μ_p^1 notiert. Es kann gezeigt werden, daß μ_p^1 sogar ein symmetrisches Wahrscheinlichkeitsmaß ist (siehe [4], 24.3.). Weiter bezeichnen μ_p das Produktmaß der μ_p^1 auf $\mathbb{R}^\infty := \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ und π_i die i-te Projektion von $\mathbb{R}^\infty$ auf $\mathbb{R}$. Die π_i bilden somit für $0 < p \le 2$ eine Folge p-stabiler, symmetrisch und identisch verteilter, stochastisch unabhängiger Abbildungen auf $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \mu_p)$.

Mit Hilfe der Maße μ_p kann nun eine andere Art von „Typ" definiert werden:

Definition 3.10 *Sind E ein Banachraum und $0 < p < s \le 2$, so hat E stabilen Typ (s,p), falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x_1, \ldots, x_n \in E$ gilt:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) x_i \right\|_E^p \mu_s(d\omega) \right)^{1/p} \le c \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^s \right)^{1/s} .$$

In diesem Fall wird die kleinste solche Konstante c mit $T_{s,p}(E)$ bezeichnet.

Ein mit der Kahane-Ungleichung vergleichbares Ergebnis von J. Hoffmann-Jørgensen in [14] liefert die Unabhängigkeit dieser Definition von p.

Satz 3.11 (J. Hoffmann-Jørgensen) *Sind $0 < p < q < s \leq 2$, dann existiert eine Konstante $0 < b_{s,p,q} < \infty$, so daß für alle Banachräume E und alle $x_1, \ldots, x_n \in E$ gilt:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) x_i \right\|_E^q \mu_s(d\omega) \right)^{1/q} \leq b_{s,p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) x_i \right\|_E^p \mu_s(d\omega) \right)^{1/p} .$$

Ist also ein Banachraum vom stabilen Typ (s, p) für *ein* $0 < p < s$, so ist er dies für *alle* $0 < p < s$. Im weiteren wird daher häufig nur vom *stabilen Typ s* gesprochen. Das folgende, in ([26] exp. 7.) zu findende Ergebnis besagt zudem, daß jeder Banachraum „stabilen Kotyp (s, p)“ hat:

Satz 3.12 *Für jeden Banachraum E und alle $0 < p < s < 2$ gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x_1, \ldots, x_n \in E$ gilt:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^s \right)^{1/s} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) x_i \right\|_E^p \mu_s(d\omega) \right)^{1/p} .$$

Die kleinste solche Konstante c wird in diesem Fall mit $C_{s,p}(E)$ bezeichnet.

Um den stabilen Typ mit dem Typ vergleichen zu können, wird noch der folgende Satz benötigt, dessen Beweis in ([4], 24.3. und 24.4) zu finden ist.

Satz 3.13 (Lévy) *Seien $0 < q < p < 2$, so ist*

$$c_{p,q} := \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^q \mu_p^1(dx) \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} |\pi_1(\omega)|^q \mu_p(d\omega) \right)^{1/q} < \infty \ ,$$

das heißt es ist $\pi_i \in L_q(\mu_p)$. Ferner gilt für alle $(\alpha_i) \in \ell_p$:

$$c_{p,q} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} | \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \pi_i(\omega) |^q \mu_p(d\omega) \right)^{1/q}$$

Der nächste Satz garantiert nun, daß es Banachräume vom stabilen Typ p gibt. Dabei wird der stabile Typ eines Raumes durch seinen Typ „abgeschätzt“.

Satz 3.14 *Sind $1 \leq q < s < p \leq 2$ und E vom Typ p, so ist E vom stabilen Typ (s,q), und es gilt:*

$$T_{s,q}(E) \leq c_{p,q}^{-1}\ c_{s,q}\ c_{p,s}\ T_p(E).$$

Beweis: Sind $x_1, \ldots, x_n \in E$, so gilt wegen der Unabhängigkeit und der Symmetrie der (π_i) für alle $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n \pi_i(\omega) x_i \right\|_E^q \mu_s(d\omega) \\
= & \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right\|_E^q \otimes \pi_i(\mu_s)(d(\omega_1, \ldots)) \\
= & \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right\|_E^q \otimes (r_i(t)\pi_i)(\mu_s)(d(\omega_1, \ldots)) \\
= & \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)\pi_i(\omega) x_i \right\|_E^q \mu_s(d\omega).
\end{aligned}$$

Damit folgt dann insgesamt mit Hilfe des Satzes 3.13:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n \pi_i(\omega) x_i \right\|_E^q \mu_s(d\omega) \right)^{1/q} \\
= & \left(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)\pi_i(\omega) x_i \right\|_E^q \mu_s(d\omega) dt \right)^{1/q} \\
\leq & \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)\pi_i(\omega) x_i \right\|_E^2 dt \right)^{q/2} \mu_s(d\omega) \right)^{1/q} \\
\leq & \ T_p(E) \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_i(\omega) x_i\|_E^p \right)^{q/p} \mu_s(d\omega) \right)^{1/q} \\
= & \ c_{p,q}^{-1}\ T_p(E) \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \int_{\mathbb{R}^\infty} \left| \sum_{i=1}^n \pi_i(\omega)\pi_i(\varsigma)\ \|x_i\|_E \right|^q \mu_s(d\omega)\mu_p(d\varsigma) \right)^{1/q} \\
= & \ c_{s,q}\ c_{p,q}^{-1}\ T_p(E) \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_i(\varsigma) x_i\|_E^s \right)^{q/s} \mu_p(d\varsigma) \right)^{1/q} \\
\leq & \ c_{s,q}\ c_{p,q}^{-1}\ T_p(E) \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \sum_{i=1}^n \|\pi_i(\varsigma) x_i\|_E^s\ \mu_p(d\varsigma) \right)^{1/s} \\
= & \ c_{s,q}\ c_{p,q}^{-1}\ T_p(E) \left(\sum_{i=1}^n \left(\|x_i\|_E^s \int_{\mathbb{R}^\infty} |\pi_i(\varsigma)|^s\ \mu_p(d\varsigma) \right) \right)^{1/s}
\end{aligned}$$

$$= \quad c_{s,q}\ c_{p,s}\ c_{p,q}^{-1}\ T_p(E) \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{_E}^{s} \right)^{1/s} . \qquad \blacktriangleleft$$

Interessanterweise gilt auch eine Art Umkehrung des letzten Satzes. Ist nämlich für $1 \leq p < s \leq 2$ ein Banachraum E vom stabilen Typ (s,p), so ist er auch vom Typ s. Ein Beweis hierfür findet sich in [27]. Dieses Ergebnis wird hier jedoch nicht benötigt.

Es kann nun der folgende Satz bewiesen werden, der unter geeigneten Voraussetzungen eine Abschätzung von $\mathsf{m}_r(T)$ für $0 < r < 2$ liefert.

Satz 3.15 *Sind* $0 < p < \infty$, $0 < q < r < 2$ *sowie* E *ein Banachraum vom stabilen Typ* r *und* F *ein beliebiger Banachraum, so gilt für jeden stetigen und linearen Operator* $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$*:*

$$\mathsf{m}_r(T) \leq c\, \|T\| \,.$$

Dabei kann im Fall $p < q$ *als Konstante* $c = T_{r,q}(E)\ C_{r,p}(F)$ *gewählt werden. Im Fall* $q \leq p \leq r$ *kann sie dagegen als* $c = T_{r,q}(E)\ C_{r,s}(F)$ *für jedes* $0 < s < q$ *gesetzt werden. Für* $r < p$ *gilt schließlich* $\mathsf{m}_r(T) = \|T\|$.

Beweis: Zunächst soll der Fall $0 < p < q < r < 2$ bewiesen werden. Sind dazu $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$, so gilt mit den vorangestellten Sätzen:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_O \Big(\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i(y)\|_{_F}^{r}\Big)^{p/r} \nu(dy) \right)^{1/p} \\
\leq\ & C_{r,p}(F) \left(\int_O \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) Tf_i(y) \right\|_{_F}^{p} \mu_r(d\omega)\nu(dy) \right)^{1/p} \\
=\ & C_{r,p}(F) \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \int_O \left\| T\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) f_i\Big)(y) \right\|_{_F}^{p} \nu(dy)\mu_r(d\omega) \right)^{1/p} \\
\leq\ & C_{r,p}(F)\, \|T\| \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \left(\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) f_i(x) \right\|_{_E}^{q} \mu(dx) \right)^{p/q} \mu_r(d\omega) \right)^{1/p} \\
\leq\ & C_{r,p}(F)\, \|T\| \left(\int_{\mathbb{R}^\infty} \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) f_i(x) \right\|_{_E}^{q} \mu(dx)\mu_r(d\omega) \right)^{1/q} \\
=\ & C_{r,p}(F)\, \|T\| \left(\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\omega) f_i(x) \right\|_{_E}^{q} \mu_r(d\omega)\mu(dx) \right)^{1/q} \\
\leq\ & T_{r,q}(E)\ C_{r,p}(F)\, \|T\| \left(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} \|f_i(x)\|_{_E}^{r}\Big)^{q/r} \mu(dx) \right)^{1/q} .
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall kann nun wieder mit Hilfe von Multiplikationsoperatoren und dem Lemma 3.3 bewiesen werden. Auf diese Weise ergibt sich dann unter anderem die Abschätzung für den Fall $q \leq p \leq r$. Die genauere Abschätzung für den Fall $r < p$ folgt dagegen sofort aus der kontinuierlichen Minkowski-Ungleichung. Da diese Gleichheit jedoch nicht weiter benötigt wird, kann hier auf den Beweis verzichtet werden.◀

Durch Dualisierung kann nun auch der Fall $2 < r < \infty$ behandelt werden.

Korollar 3.16 *Es seien $1 < q < \infty$, $2 < r < p < \infty$ und ein stetiger, linearer Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ mit $T'(L_{p'}(\nu, F')) \subset L_{q'}(\mu, E')$ gegeben. Falls dann F' ein Banachraum vom stabilen Typ r' ist und E ein beliebiger Banachraum, so gilt:*

$$\mathsf{m}_r(T) \leq c \, \|T\| \, .$$

Dabei kann im Fall $p < q$ als Konstante $c = T_{r',p'}(F') \; C_{r',q'}(E')$ gewählt werden. Im Fall $r \leq q \leq p$ kann dagegen $c = T_{r',p'}(F') \; C_{r',s}(E')$ für jedes $1 < s < p'$ gesetzt werden. Für $q < r$ gilt wieder $\mathsf{m}_r(T) = \|T\|$.

Beweis: Zunächst wird der Satz 3.15 auf den dualen Operator $T' : L_{p'}(\nu, F') \to L_{q'}(\mu, E')$ angewendet. Mit Hilfe des Satzes 3.5 folgt dann die Behauptung. ◀

In den letzten beiden Sätzen ist zu beachten, daß die Anforderungen an den stabilen Typ im Fall $E = F = \mathbb{K}$ immer erfüllt sind. Der Satz 3.14 ermöglicht es zudem, den geforderten stabilen Typ durch eine stärkere Anforderung an den Typ von E, beziehungsweise F' zu ersetzen.

3.4 Bemerkungen und Ausblicke

Es sei zunächst bemerkt, daß die Ungleichung (3.1) auch mit Hilfe von Tensorprodukten erklärt werden kann. Bekanntlich ist $L_q(\mu, \ell_r^n(E))$ eine Realisierung von $L_q(\mu, E) \otimes \ell_r^n$. Die auf $L_q(\mu, \ell_r^n(E))$ definierte Norm $\triangle_q$ (siehe hierzu [4], S. 77ff.) induziert daher eine Norm auf $L_q(\mu, E) \otimes \ell_r^n$, die der Einfachheit halber hier ebenfalls mit $\triangle_q$ bezeichnet wird. Da $T^{(n)}$ in diesem Fall eine Realisierung von $T \otimes id_{\ell_r^n}$ ist, besagt dann $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$ nichts anderes als

$$\sup_n \left\| T \otimes id_{\ell_r^n} : L_q(\mu, E) \otimes_{\triangle_q} \ell_r^n \to L_p(\nu, F) \otimes_{\triangle_p} \ell_r^n \right\| \leq 1 \; .$$

Diese Interpretation wurde jedoch, so nützlich sie auch für lineare Operatoren ist, in diesem Kapitel nicht benutzt, da sie für $\nu-$homogene und -sublineare Operatoren so nicht möglich ist.

Verteilungen von p, q und r, bei denen $\mathsf{m}_r(T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)) < \infty$ für jeden linearen Operator ist, können auch systematischer untersucht werden. Dazu bezeichne $k_{q,p}(r, E, F)$ das - möglicherweise nicht endliche - Infimum aller $c \in \mathbb{R}$, für die für alle Maßräume (Ω, μ), (O, ν) und alle linearen und stetigen Operatoren $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ gilt:

$$\mathsf{m}_r(T) \;\leq\; c\,\|T\| \;.$$

Die Sätze des zweiten und dritten Abschnittes lassen sich dann auch als Abschätzungen von $k_{q,p}(r, E, F)$ verstehen. Beispielsweise ist $k_{\infty,1}(2, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\leq\; K_G$ nach Satz 3.8. Das Lemma 3.3 beinhaltet die „Monotonie-Aussage“

$$k_{q_1,p_1}(r, E, F) \;\leq\; k_{q,p}(r, E, F)$$

für $q_1 \leq q$ und $p_1 \geq p$. Dieses wurde implizit auch in den Beweisen von 3.7 und 3.15 benutzt. Wie man leicht sieht, gilt ferner

$$k_{q,p}(r, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\leq\; k_{q,p}(r, E, F) \;.$$

Daher kann man durch Untersuchungen von $k_{q,p}(r, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Fälle eingrenzen, in denen $k_{q,p}(r, E, F)$ endlich sein *kann*. Eine komplette Auflistung aller Fälle, in denen $k_{q,p}(r, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ endlich ist, findet sich in ([5], 5.). Mit dieser Arbeit stellt sich dann auch heraus, daß die in diesem Kapitel behandelten Verteilungen von p, q und r im wesentlichen *alle* sind, in denen $k_{q,p}(r, E, F)$ endlich sein *kann*. Überdies sind in ([5], 4.) für einige Verteilungen von p, q und r die genauen Werte von $k_{q,p}(r, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ berechnet.
Die Abschätzung von $\mathsf{m}_1(T)$ für einen linearen, stetigen Operator T ist in gewissser Weise „kritisch“: Ist die Konstante $\mathsf{m}_1(T)$ *endlich*, so sind schon *alle* Konstanten $\mathsf{m}_r(T)$ für $1 \leq r < \infty$ endlich (siehe dazu [4] 7.8.). Bei geeigneter Definition von $\mathsf{m}_\infty(T)$ kann man zudem zeigen, daß auch der Fall $\mathsf{m}_\infty(T) < \infty$ im obigen Sinne „kritisch“ ist.
Da die $\triangle_1$-Norm auf $L_1(\mu) \otimes \ell_r$ der projektiven Norm des Tensorproduktes entspricht und diese die metrische Abbildungseigenschaft besitzt, folgt $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ für alle stetigen, linearen Operatoren $T : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$ und für alle $1 \leq r < \infty$.
Für positive Operatoren $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ wurde in Proposition 3.6 gezeigt, daß sie ebenfalls $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ für alle $1 \leq r < \infty$ erfüllen. Damit gilt dies auch für Differenzen von positiven Operatoren. Bemerkenswerterweise ist davon auch eine Art Umkehrung wahr, wie Virot in [32] 1981 gezeigt hat (vgl. dazu [4] 7.3.,S.81 und 7.8.).

Die Ergebnisse dieses Kapitels gelten fast ausschließlich für *lineare* Operatoren. Für einige sublineare Operatoren können die Resultate jedoch übertragen werden. Definiert man, daß

ein Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu)$ linearisierbar *heißt, falls es einen Banachraum F und einen linearen, stetigen Operator $T_o : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ gibt, so daß $|Tf(.)| = \|T_o f(.)\|_F$ für alle $f \in L_p(\mu, E)$ gilt,*

lassen sich aus dem Satz 3.15 auch Abschätzungen von $\mathsf{m}_r(T)$ für linearisierbare Operatoren $T : L_q(\mu) \to L_p(\nu)$ herleiten. In den Sätzen 3.7 und 3.16 tritt dagegen die Schwierigkeit auf, daß auch der Raum F gewissen Voraussetzungen genügen muß. Diese Sätze lassen sich daher bespielsweise nicht auf maximale Operatoren anwenden. Operatoren dagegen, die sich mit $L_2(\vartheta)$ linearisieren lassen, sind ebenfalls in der harmonischen Analysis von Bedeutung und gestatten eine Übertragung der Sätze 3.7 und 3.16. Für monotone, linearisierbare Operatoren kann zudem ein Analogon zu Proposition 3.6 bewiesen werden (siehe dazu [9], V 1.23.).
Die Schwierigkeit, viele Sätze dieses Kapitels nicht auf maximale Operatoren übertragen zu können, ist hinsichtlich der harmonischen Analysis bedauerlich. Gleichwohl ist es möglich, Ungleichungen vom Typ (3.1) für maximale Operatoren *im Einzelfall* zu beweisen. So wurden beispielsweise für den *Hardy-Littlewood-maximal-operator* (siehe dazu [9], V 6.1. und V 4.3., sowie [31], XII 1.1.) und für einige Verallgemeinerungen dieses Operators (siehe dazu [9], V 4.2.) solche Ungleichungen bewiesen.

Kapitel 4

Gewichtete Normungleichungen

Im zweiten Kapitel wurde unter anderem untersucht, wann es zu einem ν-sublinearen, stetigen Operator $T : L_q(\mu) \to L_o(\nu)$ ein *Gewicht* $w \in L_o^{>0}(\nu)$ und ein $q \in]0,p]$ gibt, so daß T sogar nach $L_{p,\infty}(wd\nu)$ abbildet und bezüglich des Maßes $wd\nu$ vom schwachen Typ (q,p) ist. Der Bildraum solcher Operatoren ist dann kleiner als dies a-priori angenommen wurde. Zudem ist auch die Stetigkeit „stärker". Von ähnlichen Fragestellungen für Operatoren $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ wird auch dieses Kapitel geleitet. Im Vordergrund steht hier die Existenz *geeigneter* meßbarer, positiver Funktionen w_1 und w_2, sogenannter Gewichte, die es einerseits ermöglichen, T als einen stetigen Operator $L_r(w_1 d\mu, E) \to L_r(w_2 d\nu, F)$ aufzufassen, und die andererseits die Räume $L_q(\mu, E)$ und/oder $L_p(\nu, F)$ „verbessern". Diese „Verbesserung" ist dabei als eine durch die Hölderungleichung bedingte, stetige Einbettung $id : L_q(\mu, E) \to L_r(w_1 d\mu, E)$, beziehungsweise $id : L_r(w_2 d\nu, F) \to L_p(\nu, F)$ zu verstehen. Dadurch wird dann neben der *Größe* von $L_q(\mu, E)$ beziehungsweise $L_p(\nu, F)$ auch die entsprechende *Norm*, bezüglich der T stetig ist, verändert. Als charakteristisch für solche Operatoren wird sich das Einhalten einer Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung in r erweisen.
Ein wesentliches Hilfsmittel für die Beweise dieses Kapitels wird eine Version des Lemmas von Ky Fan sein, die im ersten Abschnitt vorgestellt und bewiesen wird.
Im zweiten Abschnitt werden dann für den Fall $0 < p \leq r \leq q \leq \infty$ diejenigen Operatoren charakterisiert, zu denen es Gewichte w_1 und w_2 gibt, die sowohl den Definitionsbereich als auch den Bildraum im obigen Sinne verbessern. Neben der schon erwähnten Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung in r wird sich für diese Operatoren eine Faktorisierung mit Hilfe von Multiplikationsoperatoren durch $L_r(\mu, E)$ und $L_r(\nu, F)$ als charakteristisch erweisen, vergleichbar mit dem Satz 2.2. Als Spezialfall dieser Untersuchungen ergibt sich schließlich ein Faktorisierungssatz von Maurey.
Der Endpunkt dieser Untersuchungen wird dann im dritten Abschnitt erreicht. Neben dem Beweis eines „allgemeinen Prinzips" der Äquivalenz von vektorwertigen und gewichteten Normungleichungen eines bestimmten Typs werden in diesem Abschnitt die bisherigen Ergebnisse des Kapitels erörtert.

4.1 Das Lemma von Ky Fan

Dieser Abschnitt enthält zwei wichtige Hilfssätze. Der erste ist eine Version des Lemmas von Ky Fan, die sich im folgenden als fundamental erweisen wird. Der zweite Hilfssatz ist eher technischer Natur und dient dazu, das Lemma von Ky Fan im zweiten Abschnitt leichter anwenden zu können.

Lemma 4.1 (Ky Fan) *Sei $K \neq \emptyset$ eine konvexe und kompakte Teilmenge eines separierten, topologischen Vektorraumes und $\mathcal{K}$ eine konvexe Menge mit*

$$\mathcal{K} \subset \{\Phi : K \to [-\infty, \infty[\mid \Phi \textit{ konkav und oberhalb stetig } \} \ .$$

Wenn es nun zu jedem $\Phi \in \mathcal{K}$ ein $x \in K$ mit $\Phi(x) \geq 0$ gibt, dann existiert sogar ein $x_o \in K$, so daß für alle $\Phi \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\Phi(x_o) \geq 0 \ .$$

Unter den Voraussetzungen des Lemmas von Ky Fan kann also ein von $\Phi \in \mathcal{K}$ *unabhängiges* $x_o \in K$ mit $\Phi(x_o) \geq 0$ gefunden werden.

Der Beweis basiert im wesentlichen auf den Beweis in ([22], E 4.2.), auch wenn die hier vorgestellte Variante ein vorsichtigeres Argumentieren erfordert.

Beweis: Ohne Einschränkung kann $\mathcal{K} \neq \emptyset$ vorausgesetzt werden. Es ist dann

$$\emptyset \quad \neq \bigcap_{\Phi \in \mathcal{K}} \{\Phi \geq 0\} \quad = \bigcap_{\substack{\Phi \in \mathcal{K} \\ \varepsilon < 0}} \{\Phi \geq \varepsilon\}$$

zu beweisen. Da alle $\{\Phi \geq \varepsilon\}$ abgeschlossen sind, genügt es wegen der Kompaktheit von K zu zeigen, daß alle endlichen Durchschnitte der Form $\bigcap_{i=1}^n \{\Phi_i \geq \varepsilon_i\}$ nicht leer sind. Seien also $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_1, \ldots \Phi_n \in \mathcal{K}$ und $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n < 0$. Setzt man

$$\tilde{K} := \{x \in K \mid \Phi_i(x) > -\infty \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\} \ ,$$

so gibt es wegen $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i \in \mathcal{K}$ nach Voraussetzung ein $x \in K$ mit $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \geq 0$. Damit ist $\tilde{K}$ nicht leer. Es seien nun ferner

$$\begin{aligned} P &:= \{(t_1, \ldots, t_n) \in \ell_\infty^n \mid \varepsilon_i < t_i\} \\ Q &:= \operatorname{conv}\{(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)) \in \ell_\infty^n \mid x \in \tilde{K}\} \ . \end{aligned}$$

Angenommen, es wäre $P \cap Q = \emptyset$. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach existieren dann $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$, so daß für alle $(t_1, \ldots, t_n) \in P$ und alle $x \in \tilde{K}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) < \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i \ . \tag{4.1}$$

Ist nun $\lambda > 0$, $x \in \tilde{K}$ und e_i der $i-$te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$, so ist $\lambda e_i \in P$ und daher gilt $\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) < \alpha_i \lambda$. Für $\lambda \to \infty$ folgt somit $\alpha_i \geq 0$. Da zumindest ein $\alpha_i > 0$ ist, gilt wegen der Ungleichung (4.1) dann für alle $x \in \tilde{K}$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i < 0 \ .$$

Es wird nun zunächst der Fall betrachtet, in dem alle $\alpha_i > 0$ sind. Für jedes $x \in K \setminus \tilde{K}$ ist dann $\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) = -\infty$. Damit steht die Funktion $\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i \in \mathcal{K}$ aber im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme $P \cap Q = \emptyset$ erwies sich daher im Fall $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ als falsch.
Es muß also noch der Fall $\alpha_i = 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ zum Widerspruch geführt werden. Hierbei kann nun aufgrund der Konvention $0 \cdot (-\infty) = 0$ von $x \in K \setminus \tilde{K}$ nicht mehr auf $\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) = -\infty$ geschlossen werden. Es wird deswegen im folgenden versucht, die α_i so „abzuändern", daß ein ähnlicher Schluß wie im ersten Fall möglich wird: Da oberhalb stetige Funktionen mit Werten in $[-\infty, \infty[$ auf einem Kompaktum beschränkt sind, gibt es eine gemeinsame obere Schranke $M \in]0, \infty[$ der $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Ohne Einschränkung kann ferner angenommen werden, daß es ein $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt, so daß $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$ und $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ gilt. Setzt man nun

$$c := -\frac{1}{2M(n-m)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \ ,$$

so ist $c > 0$. Definiert man weiter

$$\begin{aligned} \beta_i &:= \frac{\alpha_i}{1 + c(n-m)} && \text{für } i \leq m; \\ \beta_i &:= \frac{c}{1 + c(n-m)} && \text{für } i > m \ , \end{aligned}$$

so sind auch alle $\beta_i > 0$. Mit der Ungleichung (4.1) gilt zudem wegen $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ für alle $x \in \tilde{K}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i \Phi_i(x) &= \frac{1}{1 + c(n-m)} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) + \sum_{i=m+1}^n c \ \Phi_i(x) \right) \\ &\leq \frac{1}{1 + c(n-m)} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i + c(n-m)M \right) \\ &= \frac{1}{1 + c(n-m)} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \right) \\ &< 0 \ . \end{aligned}$$

Analog zum ersten Fall erfüllt nun wegen $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ und $\beta_i > 0$ die Funktion $\sum_{i=1}^n \beta_i \Phi_i \in \mathcal{K}$ nicht die Voraussetzung des Lemmas. Das heißt,

die Annahme $P \cap Q = \emptyset$ ist insgesamt verworfen.
Es existiert also ein $(t_1, \dots, t_n) \in P \cap Q$. Nach der Definition von Q gibt es dann $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1]$ mit $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ und $x_1, \dots, x_k \in \tilde{K}$, so daß für alle $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$t_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Phi_i(x_j).$$

Setzt man nun $x := \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$, so ist $x \in K$ und wegen der Konkavität der Φ_i folgt:

$$\Phi_i(x) = \Phi_i(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j) \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j \Phi_i(x_j) = t_i > \varepsilon_i \ ,$$

das heißt, es ist $x \in \bigcap_{i=1}^n \{\Phi_i \geq \varepsilon_i\}$, womit die Behauptung, wie anfangs bemerkt, bewiesen ist. ◄

Um das Lemma von Ky Fan im nächsten Abschnitt anwenden zu können, wird noch das folgende Ergebnis benötigt:

Lemma 4.2 *Sind $1 \leq a \leq \infty$, $1 \leq b < \infty$, $f \in L_o^{\geq 0}(\mu)$ und $\emptyset \neq K \subset L_a^{\geq 0}(\mu)$ konvex und schwach-kompakt, so ist die Funktion*

$$\begin{aligned} \Phi : K &\to [-\infty, 0] \\ h &\mapsto -\int_\Omega f \ h^{-b} d\mu \end{aligned}$$

konkav und oberhalb stetig bezüglich der schwachen Topologie auf K.

Beweis: Es wird zunächst gezeigt, daß Φ konkav ist. Seien dazu $h_1, h_2 \in K$ und $\lambda \in [0,1]$. Da in den Fällen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ aufgrund der Konvention $0 \cdot \infty = 0$ nichts zu zeigen ist, kann ohne Einschränkung $\lambda \in]0,1[$ angenommen werden. Wegen der Konkavität von $s \mapsto -s^{-b}$ auf $]0, \infty[$ und einer Fallunterscheidung in $\mu(\{f > 0\} \cap \{h_1 = h_2 = 0\}) = 0$ und $\mu(\{f > 0\} \cap \{h_1 = h_2 = 0\}) > 0$ für das erste Integral, gilt dann:

$$\begin{aligned} & \Phi(\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2) \\ = & -\int\limits_{\{h_1 = h_2 = 0\}} f \ (\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2)^{-b} d\mu \\ & \quad - \int\limits_{\Omega \setminus \{h_1 = h_2 = 0\}} f \ (\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2)^{-b} d\mu \\ \geq & -\int\limits_{\{h_1 = 0\}} \lambda f \ h_1^{-b} d\mu \ - \int\limits_{\{h_2 = 0\}} (1-\lambda) f \ h_2^{-b} d\mu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \int\limits_{\Omega \setminus \{h_1=0\}} \lambda f \; h_1^{-b} d\mu \; - \int\limits_{\Omega \setminus \{h_2=0\}} (1-\lambda) f \; h_2^{-b} d\mu \\
= \;& \lambda \Phi(h_1) + (1-\lambda)\Phi(h_2) \; ,
\end{aligned}
$$

das heißt, Φ ist konkav. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist somit $\{h \in K \mid \Phi(h) \geq \varepsilon\}$ konvex. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach reicht es also zu zeigen, daß $\{\Phi \geq \varepsilon\}$ abgeschlossen bezüglich $\|.\|_a$ ist. Seien dazu $h_n \in \{\Phi \geq \varepsilon\}$ und $h \in L_a^{\geq 0}(\mu)$ mit $\|h_n - h\|_a \to 0$. Dann ist $h \in K$, und es existiert eine Teilfolge h_{n_k}, die μ-fast überall gegen h konvergiert. Also folgt mit dem Lemma von Fatou

$$
\Phi(h) = - \int\limits_{\Omega} f \liminf_{k\to\infty} h_{n_k}^{-b} d\mu \geq - \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f \; h_{n_k}^{-b} d\mu = - \liminf_{k\to\infty} -\Phi(h_{n_k}) \geq \varepsilon \; ,
$$

das heißt $h \in \{\Phi \geq \varepsilon\}$. ◀

4.2 Gewichtete Normungleichungen im Fall $p \leq r \leq q$

In diesem Abschnitt wird das schon angekündigte, erste Hauptergebnis dieses Kapitels vorgestellt und bewiesen. Anschließend wird noch ein wichtiger Spezialfall, der Faktorisierungssatz von Maurey, präsentiert.

Satz 4.3 *Seien $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$ und $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ ein ν-homogener, in 0 stetiger Operator. Setzt man*

$$
\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \qquad \textit{und} \qquad \frac{1}{\beta} := \frac{1}{p} - \frac{1}{r},
$$

so sind äquivalent:

i.) Es gibt ein $h \in \mathcal{W}_\beta(\nu)$ und weiterhin für jedes $\varepsilon > 0$ ein $g_\varepsilon \in \mathcal{W}_\alpha(\mu)$ sowie einen ν-homogenen, in 0 stetigen Operator $T_\varepsilon : L_r(\mu, E) \to L_r(\nu, F)$ mit $\|T_\varepsilon\| \leq 1 + \varepsilon$, so daß

$$
\begin{tikzcd}
L_q(\mu, E) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "M_{g_\varepsilon}"'] & L_p(\nu, F) \\
L_r(\mu, E) \arrow[r, "T_\varepsilon"'] & L_r(\nu, F) \arrow[u, "M_h"']
\end{tikzcd}
\tag{4.2}
$$

kommutiert.

ii.) Es existieren ein $w_1 \in \mathcal{W}_{\alpha/r}(\mu)$ und ein $w_2 \in \mathcal{W}_{\beta/r}(\nu)$, so daß für alle $f \in L_q(\mu, E)$ der Operator T die folgende gewichtete Normungleichung *erfüllt:*

$$\int_O \|Tf(y)\|_F^r w_2^{-1}(y)\ \nu(dy) \ \leq \int_\Omega \|f(x)\|_E^r w_1(x)\ \mu(dx). \qquad (4.3)$$

iii.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ gilt:

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^n \|Tf_i(.)\|_F^r\right)^{1/r}\right\|_p^r \leq \left\|\left(\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r\right)^{1/r}\right\|_q^r.$$

In einigen Fällen können dabei die Existenzaussagen noch präzisiert werden:

- *Ist $\alpha = \infty$, so bleibt der Satz wahr, wenn in der Aussage i.) die Funktion g und in der Aussage ii.) das Gewicht w_1 durch die konstante Einsfunktion ersetzt werden. Analoges gilt im Fall $\beta = \infty$.*
- *Ist der Operator T ν-sublinear oder linear, so gilt der Satz auch dann, wenn in der Aussage i.) die Operatoren T_ε als ν-sublinear beziehungsweise linear vorausgesetzt werden. Im linearen Fall kann zudem in der Aussage i.) das ε durch 0 ersetzt werden.*

Außerdem gilt der Satz zusammen mit den obigen Präzisierungen in den Fällen $1 \leq p < r < q = \infty$ und $1 < p = r < q = \infty$, falls T linear ist und der duale Operator $T'(L_{p'}(\nu, F')) \subset L_1(\mu, E')$ erfüllt.
Sind $0 < p \leq r \leq q < \infty$, so bleiben schließlich die Aussagen ii.) und iii.) einschließlich der Präzisierungen für die Fälle $\alpha = \infty$ und $\beta = \infty$ noch äquivalent. Dies ist im weiteren noch von Bedeutung.

Wie im dritten Kapitel schon angekündigt, zeigt die Implikation *iii.)* $\to$ *i.)*, daß sich für $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$ ein Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ mit $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ in die aus Beispiel 3.2 bekannten „Grundtypen" zerlegen läßt.
Auch die Aussage *ii.)* entspricht einer Faktorisierung:

$$\begin{array}{ccc} L_q(\mu, E) & \xrightarrow{\quad T \quad} & L_p(\nu, F) \\ \Big\downarrow id & & \Big\uparrow id \\ L_r(w_1 d\mu, E) & \xrightarrow[\quad „T“ \quad]{} & L_r(w_2^{-1} d\nu, F) \end{array}$$

Hierbei werden mit *id* die aufgrund der Hölderungleichung stetigen

Einbettungen $f \mapsto f$ und mit „T“ die nach Aussage *ii.*) in 0 stetige Abbildung T auf dem Teilraum $L_q(\mu, E) \subset L_r(w_1 d\mu, E)$ bezeichnet. In diesem Sinne ist der Satz 4.3 eine Charakterisierung derjenigen Operatoren, deren Definitionsraum durch Gewichte „vergrößert“ und deren Bildraum gleichzeitig durch Gewichte „verkleinert“ werden können.
Die Proposition 3.6 und die Sätze 3.7 und 3.8 geben Kriterien an, unter denen ein Operator die Aussage *iii.*) erfüllt. Damit erhält man durch den Satz 4.3 „automatisch“ eine Zerlegung solcher Operatoren. Im fünften Kapitel werden einige Anwendungen vorgestellt, bei denen dieses ausgenutzt wird.
Insgesamt dient daher der Satz 4.3 auch weniger dazu, eine Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung für einen Operator T zu erhalten, als vielmehr durch $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ auf die Aussagen *i.*) und *ii.*) zu schließen.

Um den Beweis der Implikation *iii.*) $\to$ *ii.*) nicht zu aufwendig führen zu müssen, wird zuerst das folgende Lemma, das die Bezeichnungen des Satzes 4.3 übernimmt, bewiesen:

Lemma 4.4 *Seien $\emptyset \neq K_1 \subset L_{q/r}(\mu)'$ konvex und schwach*-kompakt sowie $\emptyset \neq K_2 \subset L^{\geq 0}_{\beta/p}(\nu)$ konvex und schwach-kompakt. Existieren dann zu allen $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ jeweils ein $\varphi \in K_1$ und ein $h \in K_2$ mit*

$$\langle \varphi, \sum_{i=1}^{n} \|f_i(.)\|_E^r \rangle = \left\| (\sum_{i=1}^{n} \|f_i(.)\|_E^r)^{1/r} \right\|_q^r$$

sowie

$$\int_O \sum_{i=1}^{n} \|Tf_i(y)\|_F^r h^{-r/p}(y)\ \nu(dy) = \left\| (\sum_{i=1}^{n} \|Tf_i(.)\|_F^r)^{1/r} \right\|_p^r$$

und gilt $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$, so existieren ein $\varphi_o \in K_1$ und ein $h_o \in K_2$, so daß für alle $f \in L_q(\mu, E)$ gilt:

$$\int_O \|Tf(y)\|_F^r h_o^{-r/p}(y)\ \nu(dy) \leq \langle \varphi_o, \|f(.)\|_E^r \rangle.$$

Beweis: Die Menge $K := K_1 \times K_2$ ist konvex und kompakt bezüglich der Produkttopologie $\tau := \sigma(L_{q/r}(\mu)', L_{q/r}(\mu)) \times \sigma(L_{\beta/r}(\mu), L_{\beta/r}(\mu)')$. Zu $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ sei nun die Abbildung $\Phi_{f_1,\ldots,f_n} : K \to [-\infty, \infty)$ definiert durch:

$$\Phi_{f_1,\ldots,f_n}(\varphi, h) := \langle \varphi, \sum_{i=1}^{n} \|f_i(.)\|_E^r \rangle - \int_O \sum_{i=1}^{n} \|Tf_i(y)\|_F^r h^{-r/p}(y)\ \nu(dy).$$

Nach Lemma 4.2 ist dann die Abbildung

$$K \ni (g,h) \mapsto -\int\limits_O \sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r h^{-r/p}(y)\nu(dy)$$

konkav und oberhalb stetig bezüglich τ. Da ferner $\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r \in L_{q/r}(\mu)$ ein stetiges Funktional auf $L_{q/r}(\mu)$' darstellt, ist $\Phi_{f_1,\ldots,f_n}$ insgesamt konkav und oberhalb stetig bezüglich τ. Sind nun $\varphi \in K_1$ und $h \in K_2$ zu den $f_1,\ldots,f_n$ gemäß Voraussetzung gewählt, so gilt zudem

$$\begin{aligned}
\Phi_{f_1,\ldots,f_n}(\varphi,h) &= \langle\varphi, \sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r\rangle - \int\limits_O \sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r h^{-r/p}(y)\ \nu(dy) \\
&= \left\|(\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r)^{1/r}\right\|_q^r - \left\|(\sum_{i=1}^n \|Tf_i(.)\|_F^r)^{1/r}\right\|_p^r \\
&\geq 0\ .
\end{aligned}$$

Definiert man nun

$$\mathcal{K} := \{\ \Phi_{f_1,\ldots,f_n}\ |\ n \in \mathbb{N} \text{ und } f_1,\ldots,f_n \in L_q(\mu,E)\}\ ,$$

so ist $\mathcal{K}$ wegen der $\nu-$Homogenität von T konvex. Da die Konvention $0\cdot(\pm\frac{1}{0}) = 0\cdot\pm\infty = 0$ durchgehend eingehalten wurde, existiert dann nach dem Lemma von Ky Fan ein $(\varphi_o,h_o) \in K$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $f_1,\ldots,f_n \in L_q(\mu,E)$ gilt:

$$\int\limits_O \sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r h_o^{-r/p}(y)\ \nu(dy) \leq \langle\varphi_o, \sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r\rangle\ .$$

Für $n = 1$ folgt dann die Behauptung. ◀

Beweis von Satz 4.3: *iii.)* $\to$ *ii.)* Es wird zunächst der Fall $1 \leq p < r < q < \infty$ bewiesen. Seien dazu $K_1 := \mathcal{W}_{\alpha/r}(\mu) \subset L_{q/r}(\mu)'$ und $K_2 := \mathcal{W}_{\beta/p}(\nu)$. Mit der Bemerkung nach Lemma 1.16 sind dann die Voraussetzungen des Lemmas 4.4 erfüllt. Also existieren ein $g_o \in \mathcal{W}_{\alpha/r}(\mu)$ und ein $h_o \in \mathcal{W}_{\beta/p}(\nu)$, so daß für alle $f \in L_q(\mu,E)$ gilt:

$$\int_O \|Tf(y)\|_F^r h_o^{-r/p}(y)\ \nu(dy) \leq \int_\Omega \|f(x)\|_E^r g_o(x)\ \mu(dx).$$

Setzt man nun $w_1 := g_o$ und $w_2 := h_o^{r/p}$, so ist die Behauptung bewiesen. Im Fall $1 \leq p < r = q < \infty$ liefert das Lemma 4.4 auf $K_1 := \{\chi_\Omega\} \subset L_1(\mu)'$ und $K_2 := \mathcal{W}_{\beta/p}(\nu)$ angewendet die Behauptung des ersten Zusatzes für $\alpha = \infty$. Analog kann durch Setzen von $K_1 := \mathcal{W}_{\alpha/r}(\mu)$ und $K_2 := \{\chi_O\}$ der Zusatz für den Fall $1 \leq p = r < q < \infty$ bewiesen werden. Da in allen drei Fällen nur $1 < \alpha/r, \beta/p \leq \infty$ benötigt wurde und dieses auch im Fall

$0 < p \leq r \leq q < \infty$ gilt, kann dieser Fall einschließlich der Zusätze für $\alpha = \infty$ und $\beta = \infty$ ebenfalls als bewiesen angesehen werden. Ferner ist der Fall $0 < p = r = q < \infty$ trivial.
Es wird nun der Fall $1 \leq p < r < q = \infty$ bewiesen. Dabei wird sich auch ein Beweis für den verbliebenen Fall $1 < p = r < q = \infty$ ergeben. Es seien dazu $K_1 := \{\varphi \in L_\infty(\mu)' \mid \|\varphi\| \leq 1 \}$ und $K_2 := \mathcal{W}_{\beta/p}(\nu)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert dann zu allen $f_1, \ldots, f_n \in L_\infty(\mu, E)$ ein $\varphi \in K_1$ mit

$$\langle \varphi, \sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r \rangle = \left\| \sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r \right\|_\infty = \left\| (\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r)^{1/r} \right\|_\infty^r .$$

Nach Lemma 4.4 gibt es daher, wie eben, ein $\varphi_o \in K_1$ und ein $h_o \in K_2$, so daß für alle $f \in L_\infty(\mu, E)$ gilt:

$$\int_O \|Tf(y)\|_F^r h_o^{-r/p}(y)\ \nu(dy) \leq \langle \varphi_o, \|f(.)\|_E^r \rangle . \tag{4.4}$$

Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} S : L_\infty(\mu, E) & \to & L_r(\nu, F) \\ f & \mapsto & h_o^{-1/p}\, Tf \end{array}$$

definiert, linear und stetig. Weiterhin gilt für alle $f_1, \ldots, f_n \in L_\infty(\mu, E)$:

$$\begin{aligned} \left(\int_O (\sum_{i=1}^n \|Sf_i(y)\|_F^r)^{r/r} \nu(dy) \right)^{1/r} &= \left(\int_O \sum_{i=1}^n \|Tf_i(y)\|_F^r h_o^{-r/p}(y)\ \nu(dy) \right)^{1/r} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \langle \varphi_o, \|f_i(.)\|_E^r \rangle \right)^{1/r} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r \right\|_\infty^{1/r} \\ &= \left\| (\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r)^{1/r} \right\|_\infty . \end{aligned}$$

Die Idee ist es nun, den Operator S zu dualisieren, um auf $S'_{|L_{r'}(\nu, F')}$ den schon bewiesenen ersten Zusatz anzuwenden. Durch nochmalige Dualisierung kann dann schließlich die Behauptung bewiesen werden. Zunächst wird daher $S'(L_{r'}(\nu, F')) \subset L_1(\mu, E')$ gezeigt:
Aufgrund der Ungleichung (4.4) folgt $Tf(y) = 0$ für alle $f \in L_\infty(\mu, E)$ und jeweils ν-fast alle $y \in \{h_o = 0\}$. Zur Definition von S kann deswegen im Moment ohne Einschränkung $\nu(\{h_o = 0\}) = 0$ angenommen werden. Der duale Operator von $M_{h_o^{1/p}} : L_r(\nu, F) \to L_p(\nu, F)$ erklärt zudem einen

Multiplikationsoperator

$$\begin{array}{rcl} M : L_{p'}(\nu, F') & \to & L_{r'}(\nu, F') \\ f & \mapsto & h_o^{1/p} f \ , \end{array}$$

dessen Bild wegen $\nu(\{h_o = 0\}) = 0$ nach Lemma 1.12 dicht ist. Aufgrund von $S'(M_{h_o^{1/p}})' = T'$ gilt nun insgesamt:

$$\begin{array}{rcl} S'(L_{r'}(\nu, F')) & = & S'(\overline{M(L_{p'}(\nu, F'))}) \\ & \subset & \overline{S' \circ M(L_{p'}(\nu, F'))} \\ & = & \overline{T'(L_{p'}(\nu, F'))} \\ & \subset & L_1(\mu, E') \ . \end{array}$$

Aufgrund von $\mathsf{m}_r(S) \leq 1$ ist damit nach Satz 3.5 auch $\mathsf{m}_{r'}(S'_{|L_{r'}(\nu, F')}) \leq 1$. Wendet man nun den schon bewiesenen ersten Zusatz der Implikation *iii.)* $\to$ *ii.)* auf den Operator

$$S'_{|L_{r'}(\nu, F')} : L_{r'}(\nu, F') \to L_1(\mu, E')$$

an, erhält man wegen $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{r'}$ die Existenz eines $g_o \in \mathcal{W}_{\alpha/r'}(\mu)$, mit dem für alle $f \in L_{r'}(\nu, F')$ gilt:

$$\int_\Omega \|S'f(x)\|_{E'}^{r'} \ g_o^{-1}(x) \ \mu(dx) \leq \int_O \|f(y)\|_{F'}^{r'} \nu(dy) \ .$$

Also ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} R : L_{r'}(\mu, F') & \to & L_{r'}(\mu, E') \\ f & \mapsto & g_o^{-1/r'} S' f \end{array}$$

definiert, linear und stetig. Wie eben für S' kann ferner $R'(L_r(\mu, E)) \subset L_r(\nu, F)$ gezeigt werden. Da somit $h_o^{-1/p} Tf = Sf = R'(g_o^{1/r'} f)$ für alle $f \in L_\infty(\mu, E)$ ist, folgt insgesamt:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_O \|Tf(y)\|_F^r h_o^{-r/p}(y) \ \nu(dy) & = & \displaystyle\int_O \left\| R'(g_o^{1/r'} f)(y) \right\|_F^r \nu(dy) \\ & \leq & \displaystyle\int_\Omega \|f(x)\|_E^r \ g_o^{r/r'}(x) \ \mu(dx). \end{array}$$

Setzt man nun $w_1 := g_o^{r/r'}$ und $w_2 := h_o^{r/p}$, so ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen. Beachtet man, daß im Fall $1 < p = r < q = \infty$ im obigen Beweis $S := T$ gesetzt werden kann, ist auch dieser letzte Fall bewiesen.
Es werden nun die übrigen beiden Implikationen bewiesen, die jedoch nicht soviel Arbeit verursachen:

ii.) $\to$ *i.)*: Es sei $h := w_2^{1/r}$. Ist ferner $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $\tilde{g} \in L_\alpha^{>0}(\mu)$ mit $\|\tilde{g}\| = \varepsilon$. Setzt man damit

$$g_\varepsilon := \frac{1}{1+\varepsilon}(w_1^{1/r} + \tilde{g}) \ ,$$

so ist einerseits $\|g_\varepsilon\| \leq 1$ und andererseits $w_1^{1/r} < (1+\varepsilon)g_\varepsilon$. Da ferner nach der Voraussetzung für $f \in L_q(\mu, E)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|h^{-1}Tf\|^r_{L_r(\nu,\, F)} &= \int_O \|Tf(y)\|_F^r w_2^{-1}(y)\ \nu(dy) \\ &\leq \int_\Omega \|f(x)\|_E^r w_1(x)\ \mu(dx) \\ &\leq (1+\varepsilon)^r \int_\Omega \|f(x)\|_E^r\ g_\varepsilon^r(x)\ \mu(dx) \\ &= (1+\varepsilon)^r\ \|g_\varepsilon f\|^r_{L_r(\mu,\, E)} \ , \end{aligned}$$

ist die Abbildung

$$\begin{aligned} S_\varepsilon : \mathfrak{Im}\ M_{g_\varepsilon} &\to L_r(\nu, F) \\ f &\mapsto h^{-1}Tg_\varepsilon^{-1}f \end{aligned}$$

definiert, ν-homogen und stetig in 0 mit $\|S\|_\varepsilon \leq 1+\varepsilon$. Nach Lemma 1.12 ist zudem $\mathfrak{Im}\ M_{g_\varepsilon} \subset L_r(\mu, E)$ dicht. Daher läßt sich S_ε normgleich und ν-homogen auf $L_r(\mu, E)$ fortsetzen. Bezeichnet T_ε eine solche Fortsetzung, so ist klar, daß das Diagramm kommutiert. Ist T $\nu-$sublinear, so ist dies auch S_ε. Nach Lemma 1.9 gibt es dann auch eine ν-sublineare Fortsetzung T_ε. Analog kann im linearen Fall argumentiert werden. Setzt man in diesem Fall $g_o := w_1^{1/r}$, so gilt dann für $f \in L_q(\mu, E)$ weiterhin:

$$\|h^{-1}Tf\|^r_{L_r(\nu,\, F)} \leq \|g_o f\|^r_{L_r(\mu,\, E)} \ .$$

Wegen der *Linearität* von T ist damit die Abbildung

$$\begin{aligned} S_o : \mathfrak{Im}\ M_{g_o} &\to L_r(\nu, F) \\ g_o f &\mapsto h^{-1}Tf \end{aligned}$$

wohldefiniert, linear und stetig mit $\|S_o\| \leq 1$. Bezeichnet T_o die nach Korollar 1.13 existierende Fortsetzung von S_o auf $L_r(\mu, E)$, so ist die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen.

i.) $\to$ *iii.)* : Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\left\|T_\varepsilon^{(n)} : L_r(\mu, \ell_r^n(E)) \to L_r(\nu, \ell_r^n(F))\right\| \leq 1+\varepsilon$ und damit folgt nach Lemma 3.3 wegen $T = M_h T_\varepsilon M_g$:

$$\left\|T^{(n)} : L_q(\mu, \ell_r^n(E)) \to L_p(\nu, \ell_r^n(F))\right\| \leq 1+\varepsilon \ .$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt dann die Behauptung. ◀

Ist μ im Satz 4.3 ein Einpunktmaß, so ergibt sich ein bekannter Faktorisierungssatz von Maurey als Spezialfall:

Korollar 4.5 *Sind $1 \leq p \leq r < \infty$ und setzt man $\frac{1}{\beta} := \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, so sind für jeden μ-homogenen, in 0 stetigen Operator $T : E \to L_p(\mu, F)$ äquivalent:*

i.) Es existieren ein $h \in \mathcal{W}_\beta(\mu)$ und ein ν-homogener, in 0 stetiger Operator $\tilde{T} : E \to L_r(\mu)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq 1$, so daß

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & & L_p(\mu, F) \\
& L_r(\mu, F) \arrow[ur, "M_h"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. In diesem Fall ist $\tilde{T}f = h^{-1}Tf$ für alle $f \in E$ und damit überträgt sich eine etwaige (ν-Sub-)Linearität von T auf $\tilde{T}$.

ii.) Es existiert ein $w \in \mathcal{W}_{\beta/r}(\mu)$, so daß für alle $f \in E$ gilt:

$$\int_\Omega \|Tf(x)\|_F^r w^{-1}(x)\mu(dx) \leq \|f\|_E^r$$

iii.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n \in E$ gilt:

$$\left(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \|Tf_i(x)\|_F^r\Big)^{p/r} \mu(dx)\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_E^r\right)^{1/r}. \tag{4.5}$$

Auch hier ist zu beachten, daß die Sätze 3.7 und 3.15 sowie die Proposition 3.6 Situationen aufzeigen, in denen die Ungleichung (4.5) „automatisch" erfüllt wird. In den Sätzen 3.7 und 3.15 braucht dazu nur der Fall betrachtet werden, in dem μ ein Einpunktmaß ist, da für solche Maße ein beliebiges q gewählt werden kann. In der Proposition 3.6 kann man dagegen den Fall $q = r$ betrachten und erhält damit die Ungleichung (4.5) für positive, lineare und stetige Operatoren $L_r(\mu) \to L_p(\nu)$.
Ist ν im Satz 4.3 ein Einpunktmaß, so ergibt sich zudem leicht eine „duale Version" dieses Faktorisierungssatzes.

Das nächste Beispiel zeigt, daß man in der Aussage *i.)* des Satzes 4.3 im Gegensatz zu der Situation für lineare Operatoren bei $\nu-$sublinearen Operatoren das ε nicht durch 0 ersetzen darf:

Beispiel 4.6 *Es wird die aus dem Beispiel 1.8 bekannte $\lambda_{[0,1]}$-sublineare und in nur 0-stetige Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} T : L_2([0,2]) & \to & L_1([0,1]) \\ f & \mapsto & \left(\chi_{\mathbb{Q}}\left(\int_1^2 f d\lambda\right) - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\left(\int_1^2 f d\lambda\right)\right) \cdot f_{|[0,1]} \end{array}$$

betrachtet. Zunächst gilt wegen $|Tf| = |f_{|[0,1]}|$ *für* $w_1 := w_2 := \chi_{[0,1]}$ *und alle* $f \in L_2([0,2])$*:*

$$\int_0^1 |Tf|\ w_2^{-1} d\lambda_{[0,1]} = \int_0^1 |f_{|[0,1]}|\ d\lambda_{[0,1]} = \int_0^2 |f|\ w_1\ d\lambda_{[0,2]}\ .$$

Also erfüllt T *die Aussage ii.) des Satzes 4.3 im Fall* $r = 1$*. Angenommen, es gibt ein* $g \in \mathcal{W}_2([0,2])$*, ein* $h \in \mathcal{W}_\infty([0,1])$ *und einen* $\lambda_{[0,1]}$*-sublinearen Operator* $T_o : L_1([0,2]) \to L_1([0,1])$ *mit* $\|T_o\| \leq 1$ *und* $T = M_h \circ T_o \circ M_g$*. Für* $f := \chi_{[0,1]} \in L_2([0,2])$ *folgt dann wegen* $h^{-1} \geq 1$ *und* $\|h^{-1}Tf\|_1 \leq \|gf\|_1$*:*

$$1 \leq \int_0^1 h^{-1}|Tf|\ d\lambda_{[0,1]} \leq \int_0^2 g\ |f|\ d\lambda_{[0,2]} = \int_0^1 g_{|[0,1]}\ d\lambda_{[0,1]}\ \leq \left(\int_0^1 g^2_{|[0,1]}\ d\lambda_{[0,1]}\right)^{1/2}.$$

Also ist $\|g_{|[0,1]}\|_2^2 \geq 1$*. Wegen* $\|g\|_2^2 \leq 1$ *folgt dann*

$$\int_1^2 g^2_{|[1,2]}\ d\lambda_{[1,2]} = \int_0^2 g^2\ d\lambda_{[0,2]} - \int_0^1 g^2_{|[0,1]}\ d\lambda_{[0,1]} \leq 0\ .$$

Also ist $g_{|[1,2]}(x) = 0$ *für fast alle* $x \in [1,2]$*. Damit kann nun ein Widerspruch zur Annahme gezeigt werden: Sind nämlich* $f_1 := \chi_{[0,2]}$ *und* $f_2 := \chi_{[0,1]} + \pi\ \chi_{[1,2]}$*, so gilt einerseits* $Tf_1 = \chi_{[0,1]} \neq -\chi_{[0,1]} = Tf_2$ *und andererseits* $Tf_1 = M_h \circ T_o \circ M_g f_1 = M_h \circ T_o \circ M_g f_2 = Tf_2$*.*

Das Beispiel verdeutlicht nochmals eindringlich, wie vorsichtig selbst mit *linearisierbaren* Operatoren umgegangen werden muß. Im Beispiel wurde dabei ausgenutzt, daß für einen sublinearen Operator T im allgemeinen von $T(f_1 - f_2) = 0$ nicht auf $Tf_1 = Tf_2$ geschlossen werden kann. Genau dieses wird aber im Beweis von *ii.)* $\to$ *i.)* für $\varepsilon = 0$ und $\mu(\{g_o = 0\}) > 0$ benutzt, um T_o definieren zu können.

4.3 Der allgemeine Fall

Im letzten Abschnitt wurde im Fall $0 < p \leq r \leq q < \infty$ gezeigt, daß für jeden Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ eine vektorwertige Ungleichung in r äquivalent ist zu einer bestimmten Art von gewichteter Normungleichung. Im folgenden Abschnitt werden diese Untersuchungen nun auf den allgemeinen Fall $0 < p, q, r < \infty$ ausgedehnt. Mit Hilfe des Satzes 4.3 kann hierbei überraschend schnell ein „allgemeines Prinzip“ der Äquivalenz zwischen bestimmten gewichteten Normungleichungen und vektorwertigen Ungleichungen bewiesen werden. Im Anschluß wird ausführlicher auf die Interpretation der aus diesem Prinzip resultierenden gewichteten Normungleichungen bei unterschiedlichen Verteilungen der p, q und r eingegangen.

Satz 4.7 *Sind* $1 \leq p_1 := \min\{p, r\} \leq r \leq \max\{q, r\} := q_1 < \infty$ *sowie*

$$\frac{1}{\alpha_1} := \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}\ , \quad \frac{1}{\alpha_2} := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta_1} := \frac{1}{r} - \frac{1}{q_1}\ , \quad \frac{1}{\beta_2} := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{r},$$

so sind für jeden ν*-homogenen Operator* $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ *äquivalent:*

i.) Für alle $u_1 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_1/r}(\mu)$ *und alle* $u_2 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_2/r}(\nu)$ *existieren zwei Gewichte* $w_1 \in \mathcal{W}_{\beta_1/r}(\mu)$ *und* $w_2 \in \mathcal{W}_{\beta_2/r}(\nu)$*, so daß für alle* $f \in L_q(\mu, E)$ *mit* $u_1^{-1/r} f \in L_{q_1}(\mu, E)$ *der Operator* T *die gewichtete Norumungleichung*

$$\int\limits_O \|Tf(y)\|_F^r \, \frac{u_2(y)}{w_2(y)} \, \nu(dy) \leq \int\limits_\Omega \|f(x)\|_E^r \, \frac{w_1(x)}{u_1(x)} \, \mu(dx) \qquad (4.6)$$

erfüllt.

ii.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *und* $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu, E)$ *gilt:*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n \|Tf_i(.)\|_F^r\right)^{1/r} \right\|_p^r \leq \left\| \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(.)\|_E^r\right)^{1/r} \right\|_q^r .$$

Ist hierbei ein $\alpha_i = \infty$ *beziehungsweise ein* $\beta_i = \infty$*, so kann das entsprechende Gewicht in der Aussage i.) ohne Einschränkung durch die konstante Einsfunktion ersetzt werden.*

Um den Satz einfach beweisen zu können, soll zunächst die Ungleichung (4.6) genauer untersucht werden: Seien dazu $u_1 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_1/r}(\mu)$ und $u_2 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_2/r}(\nu)$. Die ν-homogene und in 0 stetige Abbildung

$$\begin{aligned} M_{u_2^{1/r}} T M_{u_1^{1/r}} : L_{q_1}(\mu, E) &\to L_{p_1}(\nu, F) \\ f &\mapsto u_2^{1/r} T(u_1^{1/r} f) \end{aligned}$$

erfüllt genau dann für bestimmte Gewichte $w_1 \in \mathcal{W}_{\beta_1/r}(\mu)$ und $w_2 \in \mathcal{W}_{\beta_2/r}(\nu)$ die Ungleichung

$$\int\limits_O \left\| M_{u_2^{1/r}} T M_{u_1^{1/r}} f(y) \right\|_F^r w_2(y)^{-1} \nu(dy) \leq \int\limits_\Omega \|f(x)\|_E^r w_1(x) \mu(dx) \qquad (4.7)$$

für alle $f \in L_{q_1}(\mu, E)$, wenn T die Ungleichung (4.6) für diese Gewichte u_1, u_2, w_1 und w_2 und für alle $f \in L_q(\mu, E)$ mit $u_1^{-1/r} f \in L_{q_1}(\mu, E)$ einhält. Damit wird nun der Beweis einfach:

Beweis: i.) $\to$ *ii.)* : Sind zu $u_1 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_1/r}(\mu)$ und $u_2 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_2/r}(\nu)$ Gewichte $w_1 \in \mathcal{W}_{\beta_1/r}(\mu)$ und $w_2 \in \mathcal{W}_{\beta_2/r}(\nu)$ gemäß Voraussetzung gewählt, so erfüllt $M_{u_2^{1/r}} T M_{u_1^{1/r}}$ die Ungleichung (4.7). Nach Satz 4.3 folgt dann $\mathsf{m}_r(M_{u_2^{1/r}} T M_{u_1^{1/r}}) \leq 1$. Da dies für alle $u_1 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_1/r}(\mu)$ und alle $u_2 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_2/r}(\nu)$ gilt, folgt nach Lemma 3.3 somit die Behauptung. Insbesondere ist der Zusatz für $\alpha_i = \infty$ bewiesen, da in diesem Fall nur das Gewicht $u_i \equiv 1$ für die Implikation *ii.)* $\to$ *i.)* in Lemma 3.3 benötigt wird.
ii.) $\to$ *i.)*: Sind $u_1 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_1/r}(\mu)$ und $u_2 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_2/r}(\nu)$, so ist nach Voraussetzung und Lemma 3.3 $\mathsf{m}_r(M_{u_2^{1/r}} T M_{u_1^{1/r}}) \leq 1$. Nach Satz 4.3 existieren dann

Gewichte $w_1 \in \mathcal{W}_{\beta_1/r}(\mu)$ und $w_2 \in \mathcal{W}_{\beta_2/r}(\nu)$, so daß $M_{u_2^{1/r}} T M_{u_1^{1/r}}$ die Ungleichung (4.7) für alle $f \in L_{q_1}(\mu, E)$ erfüllt. Mit der obigen Erläuterung folgt dann die Behauptung. Beachtet man ferner die erste Präzisierung zum Satz 4.3, so ist klar, daß im Falle $\beta_i = \infty$ das Gewicht $w_i \equiv 1$ gewählt werden kann. ◀

Wie auch schon im letzten Abschnitt erwähnt, sichern die Sätze des dritten Kapitels häufig die Aussage *ii.)* des voherigens Satzes. In dem nächsten Kapitel wird anhand von einigen Anwendungen dieses Satzes darauf noch näher eingegangen.

Seien nun $0 < p, q, r < \infty$ und $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ ein ν-homogener, in 0 stetiger Operator mit $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$. Nach Satz 4.7 erfüllt T dann auch gewichtete Normungleichungen der Form (4.6). Der Zusatz garantiert hierbei, daß für jede beliebige Verteilung der p, q und r zumindest zwei der auftretenden Gewichte fortgelassen werden können. Die Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten.

	$p_1 :=$	$q_1 :=$	u_1	u_2	w_1	w_2
$r < p, q$	r	q	1	$\forall$	$\exists$	1
$r = p < q$	$p = r$	q	1	1	$\exists$	1
$p < r < q$	p	q	1	1	$\exists$	$\exists$
$p < r = q$	p	$r = q$	1	1	1	$\exists$
$p, q < r$	p	r	$\forall$	1	1	$\exists$
$p > r > q$	r	r	$\forall$	$\forall$	1	1
$r = p = q$	$r = p$	$r = q$	1	1	1	1

Tabelle 4.1: Übersicht über gewichtete Normungleichungen im Satz 4.7

In der ersten Spalte stehen dabei mögliche Verteilungen von p, q und r. Die zweite und dritte Spalte geben die zu der Verteilung gehörenden Definitionen von p_1 und q_1 aus Satz 4.7 wieder. Die folgenden vier Spalten zeigen dann auf, welche Gewichte in welcher Form und mit welchem Quantor bei den verschiedenen Verteilungen der p, q und r in der Aussage *i.)* des Satz 4.7 gemäß des Zusatzes verwendet werden können. Eine 1 steht dabei für das Ersetzen des zugehörigen Gewichtes durch die konstante Einsfunktion. Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ stimmen mit den entsprechenden Quantoren der Aussage *i.)* überein. Betrachtet man beispielsweise die oberste Verteilung $0 < r < p, q < \infty$, so besagt die Tabelle, daß für einen Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ die Aussage $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$ äquivalent ist zu:

Für alle $u_2 \in \mathcal{W}^1_{\alpha_2/r}(\nu)$ existiert ein Gewichte $w_1 \in \mathcal{W}_{\beta_1/r}(\mu)$, so daß für *alle* $f \in L_q(\mu, E)$ *gilt:*

$$\int\limits_O \|Tf(y)\|_F^r u_2(y)\ \nu(dy) \leq \int\limits_\Omega \|f(x)\|_E^r w_1(x)\ \mu(dx). \tag{4.8}$$

Wie schon nach Satz 4.3 erwähnt, ändern die Gewichte das a-priori angenommene Abbildungsverhalten und die „Stetigkeit“ des Operators T. Generell „verbessern“ dabei die Gewichte w_i diese, während die Gewichte u_i diese „verschlechtern“. Im obigen Fall $0 < r < p, q < \infty$ entspricht beispielsweise die Ungleichung (4.8) der Faktorisierung:

$$\begin{tikzcd}
L_q(\mu, E) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id"'] & L_p(\nu, F) \arrow[d, "id"] \\
L_r(w_1 d\mu, E) \arrow[r, "„T“"'] & L_r(u_2 d\nu, F)
\end{tikzcd}$$

Hierbei werden wieder mit *id* die aufgrund der Hölderungleichung stetigen Einbettungen $f \mapsto f$ und mit „T“ die Abbildung T auf dem Teilraum $L_q(\mu, E) \subset L_r(w_1 d\mu, E)$ bezeichnet. Wird also die Stetigkeit des Operators T im Bildraum durch eine mit u_2 verkleinerte Norm abgeschätzt, so findet sich auch ein w_2, mit dem gleichzeitig die Norm im Definitionsbereich verkleinert werden kann. Man beachte dabei, daß die gewichteten Normen im allgemeinen nicht äquivalent zu den ursprünglichen sind. Die gewichtete Stetigkeit ist daher *qualitativ* anders als die a-priori angenommene. Die übrigen Fälle können analog interpretiert werden. Bei einem Blick in die Tabelle fällt dabei auf, daß nur im Fall $0 < p \leq r \leq q < \infty$ des Satzes 4.3 auf eine „Verschlechterung“ der Normen im Bild- oder Definitionsbereich verzichtet werden kann. Bedauerlicherweise kann jedoch gerade in diesem Fall nur für $r = 2$ eine für alle Operatoren gültige endliche Abschätzung von $\mathsf{m}_r(.)$ bewiesenen werden. Für $r \neq 2$ muß dagegen jeder einzelne Operator T auf $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ hin untersucht werden (vgl. dazu [5], 5., S.15).
Wie im zweiten Kapitel liegt auch im Satz 4.7 die Schwierigkeit in der Bestimmung der Gewichte w_i, da deren Existenz letztenendes durch das Auswahlaxiom gesichert ist. Im nächsten Kapitel werden deswegen die aus dem zweiten Kapitel bekannten Techniken benutzt, um dieses Problem für gewisse Operatoren zu lösen.

4.4 Bemerkungen und Ausblicke

Von dem Lemma von Ky Fan gibt es viele unterschiedliche Variationen. Die im ersten Abschnitt vorgestellte Version entspricht im wesentlichen der

aus ([22], E 4.2.). Eine andere Variante wird beispielsweise in der Theorie der q-dominierten Operatoren genutzt (vgl. [6], 9.7 und 9.10).
Das Korollar 4.5 wurde erstmals von Maurey 1974 in ([21], Théorème 8) in dieser Form veröffentlicht. Wichtige Vorarbeit leistete jedoch Rosenthal 1973 in ([24], Satz 8), wie Maurey in ([21], S.12) schreibt. Eine skalarwertige Version des Satzes 4.3 war ebenfalls schon in der „Umgebung von Maurey“ bekannt (vgl. dazu [4], Übung 18.15.). Der in diesem Kapitel vorgestellte Beweis des Satzes 4.3 basiert im wesentlichen auf den schon von Maurey verwendeten Techniken.
Nach Kwapień faktorisiert jeder lineare und stetige Operator, der einen Raum vom Typ 2 in einen Raum vom Kotyp 2 abbildet, durch einen Hilbertraum (vgl. dazu [6], 12.19). Zusammen mit dem Satz 3.7 ergibt nun der Satz 4.3 beispielsweise im Fall $E = F = \mathbb{K}$ ein sehr viel deutlicheres Bild einer solchen Faktorisierung.
Die Idee für Satz 4.7 ist aus ([9], VI.5.2.) entnommen. Da der dortige Beweis den Faktorisierungssatz von Maurey beziehungsweise eine „duale Version“, wie sie nach Korollar 4.5 angedeutet ist, verwendet, ist der Fall $0 < p \leq r \leq q < \infty$ jedoch ausgeschlossen. Zusätzlich zu den im fünften Kapitel noch zu behandelden Anwendungen des Satzes 4.7 finden sich dort auch noch weitere Verwendungen in den Abschnitten VI.6., VI.7. und VI.8..
Neben den in diesem Kapitel untersuchten gewichteten Normungleichungen gibt es weitere, ausführlich erforschte Fälle gewichteter Stetigkeiten. Am bedeutensten ist wohl die A_p-Theorie, in der für bestimmte, konkrete Operatoren, wie dem *Standard-Maximal-Operator*, die Gewichte, bezüglich derer diese Operatoren eine gewichtete Normungleichung erfüllen, untersucht werden. Ausführliche Beschreibungen dieser Theorie finden sich beispielsweise in ([29], Kapitel V), ([31], Kapitel IX) und ([9], Kapitel IV).
Abgesehen von den Faktorisierungssätzen, die in dieser Arbeit vorgestellt wurden, gibt es noch eine Reihe ähnlicher Sätze. So hat beispielsweise Maurey eine mit den Sätzen 2.2 und 4.3 vergleichbare Charakterisierung derjenigen Operatoren T, die einer Faktorisierung der Form

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & & L_o(\mu) \\ & L_p(\mu) \arrow[ur, "M_g"'] & \end{tikzcd}$$

genügen, bewiesen. (vgl. [21], Corollaire 15 und [9], VI.3.3.) Weiter wurde ein Faktorisierungssatz von Pisier in [23] untersucht, der in gewisser Weise eine „Mischung“ der Sätze 2.2 und 4.5 darstellt.

Kapitel 5

Anwendungen

Die Sätze 4.3 und 4.7 ergeben zusammen mit den im dritten Kapitel gesammelten Erkenntnissen über vektorwertige Ungleichungen eine Vielzahl von Möglichkeiten für p, q, r, E und F, in denen jeder Operator $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\nu, F)$ eine Faktorisierung der Form 4.2 zuläßt beziehungsweise eine Ungleichung der Form 4.6 erfüllt. Dieser „Automatismus" wird in diesem Kapitel für eine Reihe von Anwendungen augenutzt werden.
Im ersten Abschnitt wird ein bekannter Satz von Bennett, Maurey und Nahoum über die Darstellung einer unbedingt summierbaren Folge in $L_1([0,1])$ durch ein Orthonormalsystem in $L_2([0,2])$ vorgestellt und mit Hilfe des Satzes 4.3 neu bewiesen und verallgemeinert. Im Vordergrund steht danach die fast-überall punktweise Konvergenz von Reihen $\sum(a_n f_n)$ für $q-$schwach summierbare Folgen (f_n) aus einem L_p-Raum.
Wendet man den Satz 4.7 an, um aus einer vektorwertigen Ungleichung eines Operators auf eine gewichtetete Normungleichung der Form 4.6 zu schließen, so bleibt im allgemeinen die Gestalt zumindest eines der Gewichte verborgen. Im zweiten Abschnitt wird daher das aus dem zweiten Kapitel bekannte Konzept der auf einem Maßraum operierenden Gruppe wieder aufgegriffen und vertieft. Es ergeben sich „Faltungstechniken" für gewichtete Normungleichungen, die es erlauben, die Gewichte zu verändern. Diese Faltungstechniken werden dann im dritten Abschnitt dazu benutzt, eine gewichtete Normungleichung für die Fouriertransformation zu beweisen. Als Vorbereitung werden dazu rotations- und dilatationsinvariante Operatoren untersucht.
Schließlich werden im vierten Abschnitt translationsinvariante Operatoren hinsichtlich ihrer Fortsetzbarkeit untersucht. Neben bekannten Sätzen im skalarwertigen Fall ergeben sich dabei ebenso einfach interessante Fortsetzungseigenschaften für Operatoren zwischen sogenannten „mixed-spaces".

5.1 Ein Satz von Bennett-Maurey-Nahoum

In diesem Abschnitt werden Bedingungen an $(a_n) \subset \mathbb{K}$ und $(f_n) \subset L_p(\mu)$ untersucht, die garantieren, daß die Reihe $\sum(a_n f_n(x))$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ konvergiert. Unter einer bestimmten Summationsbedingung an (a_n) konvergiert die Reihe für *Orthonormalsysteme* $(f_n) \in L_2(\mu)$ fast überall punktweise nach einem Satz von Menchoff-Rademacher. Es wird sich nun herausstellen, daß dieser Satz mit Hilfe der in den letzten beiden Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse auf q-schwach-summierbare und unbedingt summierbare Folgen $(f_n) \subset L_p(\mu)$ übertragbar ist.

Es werden zunächst grundlegende Eigenschaften p-schwach-summierbarer Folgen vorgestellt. Sind dazu E ein beliebiger Banachraum und $1 \leq p < \infty$, so bezeichnet

$$\ell_p^w(E) := \{\ (x_n) \subset E \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', x_n\rangle|^p < \infty \ \text{ für alle } x' \in E'\ \}$$

die Menge aller *p-schwach-summierbaren Folgen in E*. Für $(x_n) \in \ell_p^w(E)$ ist der Operator

$$\begin{aligned} T: E' &\to \ell_p \\ x' &\mapsto (\langle x', x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

definiert, linear und graphenabgeschlossen. Da er somit stetig ist, gilt

$$w_p((x_n)) := \|T\| = \sup_{x'\in B_{E'}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x', x_n\rangle|^p)^{1/p} < \infty\ .$$

Man zeigen, daß $(\ell_p^w(E), w_p)$ ein Banachraum ist. Bezeichnet weiter

$$\ell_p^{w,o}(E) := \{\ (x_n) \in \ell_p^w(E) \mid w_p((x_n)_{n=m}^{\infty}) \to 0 \text{ für } m \to \infty\ \}\ ,$$

so ist $\ell_p^{w,o}(E)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\ell_p^w(E)$. Es kann gezeigt werden, daß eine Folge $(x_n) \subset E$ genau dann unbedingt summierbar ist, wenn $(x_n) \in \ell_1^{w,o}(E)$ ist (siehe hierzu auch [4], 8.1. und 8.3.). Einer Folge $(x_n) \in \ell_1^{w,o}(E)$ beziehungsweise $(x_n) \in \ell_p^w(E)$ kann ein Operator $\ell_{p'} \to E$ zugeordnet werden, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 5.1 *Sei E ein beliebiger Banachraum, $1 \leq p < \infty$ und $(x_n) \subset E$ im Fall $p = 1$ unbedingt summierbar und ansonsten $p-$schwach summierbar, so ist der Operator*

$$\begin{aligned} T: \ell_{p'} &\to E \\ (a_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_n x_n \end{aligned}$$

definiert, linear und stetig. Ferner gilt $T'(E') \subset \ell_p$.

Beweis: Sind zunächst $p = 1$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß $w_1((x_i)_{i=n}^{\infty}) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_o$ ist. Für jede Folge $(a_i) \in \ell_\infty$ und alle $n \geq m \geq n_o$ gilt daher:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=m}^{n} a_i x_i \right\|_E &= \sup_{x'\in B_{E'}} |\langle x', \sum_{i=m}^{n} a_i x_i\rangle| \\ &\leq \sup_{x'\in B_{E'}} \sum_{i=m}^{n} |a_i|\ |\langle x', x_i\rangle| \\ &\leq \|(a_i)\|_{\ell_\infty} w_1((x_i)_{i=m}^{\infty}) \qquad (5.1) \\ &< \|(a_i)\|_{\ell_\infty}\ \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Also ist die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge und damit in E konvergent. Der Operator T ist demnach definiert. Die Linearität von T ist klar. Eine zu (5.1) analoge Rechnung ergibt zudem

$$\|T((a_n))\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_E \leq \|(a_i)\|_{\ell_\infty} w_1((x_i)) ,$$

womit T auch stetig ist. Wie schon bemerkt, ist ferner der Operator

$$\begin{array}{rcl} S : E' & \to & \ell_1 \\ x' & \mapsto & (\langle x', x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

definiert und stetig, und da für alle $a = (a_n) \in \ell_\infty$ und alle $x' \in E'$ gilt:

$$\langle Sx', a \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x', x_n \rangle a_n = \langle x', \sum_{i=1}^{\infty} a_n x_n \rangle = \langle x', Ta \rangle ,$$

ist S der zu T duale Operator. Damit folgt die Behauptung $T'(E') \subset \ell_1$. Seien nun $1 < p < \infty$, $(a_i) \in \ell_{p'}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß $(\sum_{i=m}^{n} |a_i|^{p'})^{1/p'} < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_o$ ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=m}^{n} a_i x_i \right\|_E &= \sup_{x' \in B_{E'}} |\langle x', \sum_{i=m}^{n} a_i x_i \rangle| \\ &\leq \sup_{x' \in B_{E'}} \sum_{i=m}^{n} |a_i| \; |\langle x', x_i \rangle| \\ &\leq \sup_{x' \in B_{E'}} (\sum_{i=m}^{n} |a_i|^{p'})^{1/p'} \; (\sum_{i=m}^{n} |\langle x', x_i \rangle|^p)^{1/p} \\ &\leq \varepsilon \; w_p((x_i)) . \end{aligned}$$

Damit ist der Operator definiert. Eine zum ersten Fall analoge Argumentation ergibt zudem die Stetigkeit. Schließlich ist $T'(E') \subset \ell_p$ trivial.◀

Für das Hauptergebnis dieses Abschnittes wird ferner der folgende Satz aus der Operatortheorie benötigt.

Satz 5.2 (Erweiterungssatz) *Sind H_1 und H_2 Hilberträume, so existiert zu jedem linearen und stetigen Operator $T : H_1 \to H_2$ mit $\|T\| \leq 1$ ein Hilbertraum H_3 und eine metrische Injektion $I : H_1 \to H_2 \oplus_2 H_3$, so daß mit der Orthogonalprojektion $P : H_2 \oplus_2 H_3 \to H_2 \oplus_2 H_3$ auf H_2 gilt:*

$$T = P \circ I$$

Ist H_1 separabel und ν ein Maß mit $\dim L_2(\nu) = \infty$, *so kann $H_3 = L_2(\nu)$ gewählt werden.*

Beweis: Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi : H_1 \times H_1 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle - \langle Tx,Ty\rangle \end{array}$$

ist sesquilinear und wegen $\|T\| \leq 1$ positiv. Setzt man nun

$$N := \{x \in H_1 \mid \phi(x,x) = 0\ \}\ ,$$

so ist N wegen der Stetigkeit von T abgeschlossen. Da für $x, y \in N$ zudem mit der Parallelogrammgleichung folgt:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \phi(x+y, x+y) \\ & = & \|x+y\|_{H_1}^2 - \|Tx+Ty\|_{H_2}^2 \\ & = & 2\|x\|_{H_1}^2 + 2\|y\|_{H_1}^2 - \|x-y\|_{H_1}^2 - 2\|Tx\|_{H_2}^2 - 2\|Ty\|_{H_2}^2 + \|Tx-Ty\|_{H_2}^2 \\ & = & -\phi(x-y, x-y) \leq 0\ , \end{array}$$

ist N auch ein Unterraum. Daher gilt für $x, y \in N$ auch

$$\mathrm{Re}\ \phi(x,y) = \frac{1}{4}\left(\phi(x+y,x+y) - \phi(x-y,x-y)\right) = 0\ .$$

Wegen $\mathrm{Im}\ \phi(x,y) = -\mathrm{Re}\ i\phi(x,y) = -\mathrm{Re}\ \phi(ix,y) = 0$ ist also $\phi(x,y) = 0$ für alle $x, y \in N$. Sind nun $x \in N$, $y \in H_1 \setminus N$, so ist $\phi(y,y) > 0$. Für $\lambda := -\frac{\phi(x,y)}{\phi(y,y)}$ folgt dann

$$0 \leq \phi(x+\lambda y, x+\lambda y) = \overline{\lambda}\phi(x,y) + \lambda\overline{\phi(x,y)} + |\lambda|^2\phi(y,y) = -\ \frac{|\phi(x,y)|^2}{\phi(y,y)}\ ,$$

das heißt $\phi(x,y) = 0$. Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi : H_1/N \times H_1/N & \to & \mathbb{K} \\ (x+N, y+N) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$$

definiert. Weiterhin ist ψ ebenfalls sesquilinear, positiv und nach der Definition von N auch definit. Also ist $(H_1/N, \psi)$ ein Prähilbertraum. Ist nun H_3 eine Vervollständigung von $(H_1/N, \psi)$, so ist H_3 ein Hilbertraum. Definiert man dann

$$\begin{array}{rcl} I : H_1 & \to & H_2 \oplus_2 H_3 \\ x & \mapsto & (Tx, x+N)\ , \end{array}$$

so ist I linear. Da für $x \in H_1$ zudem

$$\|Ix\|_{H_2\oplus_2 H_3}^2 = \|Tx\|_{H_2}^2 + \|x+N\|_{H_3}^2 = \psi(x+N, x+N) + \langle Tx, Tx\rangle = \|x\|_{H_1}$$

gilt, ist I eine metrische Injektion. Wegen $P \circ I(x) = P((Tx, x+N)) = Tx$ für $x \in H_1$ ist damit die Behauptung bewiesen. Sei nun H_1 separabel und

ν ein Maß mit $\dim L_2(\nu) = \infty$. Wegen $\psi(x+N, x+N) \leq \langle x, x\rangle_{H_1}$ ist dann auch $(H_1/N, \psi)$ separabel. Jede Vervollständigung von $(H_1/N, \psi)$ ist somit ebenfalls separabel und kann daher isometrisch in $L_2(\nu)$ eingebettet werden. Aufgrund der Definition der Abbildung I kann daher auch $H_3 = L_2(\nu)$ gewählt werden. ◀

Ist (x_n) ein Orthonormalsystem in H_1, so kann die Folge (Tx_n) in H_2 also zu einem Orthonormalsystem in $H_2 \oplus_2 H_3$ *„erweitert"* werden.
Es sei auch bemerkt, daß es *endliche* Maße μ gibt, für die $L_2(\mu)$ *nicht separabel* ist (siehe dazu [8], 15.11.(d)).

Als Vorbereitung für die angekündigten Sätze dieses Kapitels wird nun noch eine *einfache* Darstellung von $L_2(\mu) \oplus_2 L_2(\nu)$ vorgestellt: Sind A, B Mengen, so wird im folgenden mit $A \oplus B := (\{0\} \times A) \ \cup \ (\{1\} \times B)$ ihre *disjunkte Vereinigung* bezeichnet. Jede Teilmenge $C \subset A \oplus B$ kann dann in $C_A \oplus C_B = C$ mit eindeutigen $C_A \subset A$, $C_B \subset B$ zerlegt werden. Sind nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $(O, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume, so ist durch

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} := \{A \oplus B \subset \Omega \oplus O \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf $\Omega \oplus O$ erklärt. Durch

$$\mu \oplus \nu \ (A \oplus B) := \mu(A) + \nu(B)$$

ist ferner auf $(\Omega \oplus O, \mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ ein Maß definiert. Wie man leicht sieht, gilt dann weiter

$$L_2(\mu) \oplus_2 L_2(\nu) = L_2(\mu \oplus \nu) \ .$$

Die Einschränkung $f \mapsto f_{|\Omega}$ von Funktionen $f \in L_2(\mu \oplus \nu)$ entspricht dann der Orthogonalprojektion von $L_2(\mu \oplus \nu)$ auf $L_2(\mu)$.

Damit kann nun leicht das erste Hauptresultat dieses Abschnittes bewiesen werden, welches im Fall $q = 1$ und $\mu = \lambda_{|[0,1]}$ auf Bennett, Maurey und Nahoum zurückgeht:

Satz 5.3 *Seien* $1 \leq p, q \leq 2$ *und* ν *ein Maß mit* $\dim L_2(\nu) = \infty$ *sowie*

$$\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta} := \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \ .$$

Ist dann $(f_n) \subset L_p(\mu)$ *im Falle* $q = 1$ *unbedingt summierbar und ansonsten* $q-$*schwach summierbar, so gibt es ein* $a = (a_n) \in \ell_\alpha$*, ein* $g \in L_\beta(\mu)$ *und ein Orthonormalsystem* $(g_n) \subset L_2(\mu \oplus \nu)$*, derart daß für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$f_n = a_n \ g \ g_{n|\Omega} \ .$$

Beweis: Nach Lemma 5.1 ist der Operator

$$\begin{aligned} T : \ell_{q'} &\to L_p(\mu) \\ (x_n) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n \end{aligned}$$

definiert und stetig. Ferner folgt $\mathsf{m}_2(T) < \infty$ nach Satz 3.7 beziehungsweise Satz 3.8. Also gibt es nach Satz 4.3 ein $a = (a_n) \in \ell_\alpha$, ein $g \in L_\beta(\mu)$ und einen stetigen, linearen Operator $T_o : \ell_2 \to L_2(\mu)$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ell_{q'} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "M_a"'] & L_p(\mu) \\
\ell_2 \arrow[r, "T_o"'] & L_2(\mu) \arrow[u, "M_g"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da nun ohne Einschränkung $\|T_o\| \leq 1$ angenommen werden kann, existiert nach Satz 5.2 eine Isometrie $I : \ell_2 \to L_2(\mu) \oplus_2 L_2(\nu) = L_2(\mu \oplus \nu)$, so daß mit der Orthogonalprojektion $P : L_2(\mu \oplus \nu) \to L_2(\mu \oplus \nu)$ auf $L_2(\mu)$ auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ell_2 \arrow[rr, "T_o"] \arrow[dr, "I"'] & & L_2(\mu) \\
& L_2(\mu \oplus \nu) \arrow[ur, "P"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Bezeichnet dann $e_n \in \ell_2$ den $n-$ten Einheitsvektor und ist ferner $g_n := Ie_n$, so ist also (g_n) ein Orthonormalsystem in $L_2(\mu \oplus \nu)$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n = Te_n = M_g P I M_a(e_n) = M_g P(a_n g_n) = a_n \; g \; g_{n|\Omega} \; . \qquad \blacktriangleleft$$

Die Zerlegung einer Folge gemäß Satz 5.3 mit Hilfe eines Orthonormalsystems vereinfacht häufig die Untersuchung zugehöriger Reihen. Um dies an einem Beispiel zu verdeutlichen, wird der folgende Satz benötigt, dessen Beweis in ([34], III. H. 22) zu finden ist.

Satz 5.4 (Menchoff, Rademacher) *Sind $(f_n) \subset L_2(\mu)$ ein Orthonormalsystem und $(a_n) \subset \mathbb{K}$ eine Folge mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \ln^2(n+1) < \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum(a_n f_n(\omega))$ für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.*

Damit folgt nun direkt:

Korollar 5.5 *Sind $1 \leq p, q \leq 2$ und $(f_n) \subset L_p(\mu)$ im Falle $q = 1$ unbedingt summierbar und ansonsten $q-$schwach summierbar, so konvergiert für alle $(x_n) \in \ell_{q'}$ und μ-fast alle $\omega \in \Omega$ die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\ln(n+1)} f_n(\omega) \; .$$

Insbesondere gilt dies im Fall $q = 1$ für $x_n = 1$.

Beweis: Sind $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\beta} := \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$, so gibt es nach Satz 5.3 ein $a = (a_n) \in \ell_\alpha$, ein $g \in L_\beta(\mu)$ und ein Orthonormalsystem (g_n) in $L_2(\mu \oplus \lambda)$ mit $f_n = a_n\ g\ g_{n|\Omega}$. Wählt man nun $x = (x_n) \in \ell_{q'}$ und setzt $y_n := x_n\ \ln^{-1}(n+1)$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n y_n|^2 \ln^2(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 |x_n|^2 \leq \|a\|_\alpha\ \|x\|_{q'} < \infty\ .$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum(a_n\ y_n\ g_n(\varsigma))$ nach dem Satz von Menchoff-Rademacher für $(\mu\oplus\lambda)-$fast alle $\varsigma \in \Omega\oplus\mathbb{R}$. Insbesondere konvergiert dann für $\mu-$fast alle $\omega \in \Omega$:

$$g(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ y_n\ g_{n|\Omega}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n\ a_n\ g(\omega)\ g_{n|\Omega}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n f_n(\omega)\ ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ◀

Es sei bemerkt, daß das Korollar 5.5 auch im Fall $2 < p < \infty$ wahr ist. Um dies zu zeigen, muß im Beweis des Satzes 5.3 statt T ein Operator

$$\ell_{q'} \xrightarrow{\ T\ } L_p(\mu) \xrightarrow{\ M_g\ } L_2(\mu)$$

für einen stetigen Multiplikationsoperator mit $g > 0$ gemäß des Satzes 4.3 faktorisiert werden. Es ergibt sich dann $f_n = a_n\ g^{-1}\ g_{n|\Omega}$. Der Beweis des Korollars 5.5 bleibt schließlich wegen $g > 0$ unberührt. Eine analoge Argumentation ermöglicht auch den Beweis des Korollars 5.5 im Fall $2 < q < \infty$. Dabei muß für $(x_n) \in \ell_{q'}$ mit $x_n \neq 0$ jedoch mit Lemma 1.16 erst ein „passender“ stetiger Multiplikationsoperator $M_{(a_n)} : \ell_2 \to \ell_{q'}$ mit $(x_n) \in \mathfrak{Im}\ M_{(a_n)}$ gefunden werden, um dann den Operator

$$\ell_2 \xrightarrow{\ M_{(a_n)}\ } \ell_{q'} \xrightarrow{\ T\ } L_p(\mu)$$

mit Hilfe des Satzes 4.3 zu faktorisieren. Es ergibt sich damit $f_n = a_n^{-1}\ g\ g_{n|\Omega}$, wobei $a_n \neq 0$ ist. Wie im Beweis von Korollar 5.5 kann anschließend auf die fast-sichere Konvergenz der Reihe geschlossen werden.

5.2 Erweiterung der „Faltungstechniken“

In diesem Kapitel werden die Faltungstechniken für operationsinvariante Operatoren des zweiten Kapitels auf gewichtete Normungleichungen übertragen.

Wie im zweiten Kapitel sei im folgenden G eine lokalkompakte Gruppe mit unimodularem Haarmaß γ, die auf einem Maßraum (Ω, μ) $\Delta-$invariant operiert. Ist dann $\omega \in \Omega$, so heißt die Menge

$$G\omega = \{x \cdot \omega \mid x \in G\}$$

die *Bahn* von ω. Gibt es zu $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ein $x \in G$ mit $x\omega_1 = \omega_2$, so sei $\omega_1 \sim \omega_2$. Wie man leicht nachrechnet, ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Ω, deren Äquivalenzklassen die Bahnen von Ω sind. Daher ist Ω die disjunkte Vereinigung der verschiedenen Bahnen. Eine Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ heißt *bahnenkonstant*, falls $f(x\omega) = f(\omega)$ für fast alle $x \in G$ und $\omega \in \Omega$ gilt, das heißt, wenn f auf den Bahnen fast-sicher konstant ist. Im Fall $G = \mathsf{ON}(n)$ und $(\Omega, \mu) = (\mathbb{R}^n, \lambda^n)$ - mit der im zweiten Kapitel beschriebenen invarianten Operation - werden bahnenkonstante Funktionen auch rotationssymmetrisch oder radial genannt. Um aus einer gegebenen Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine bahnenkonstante Funktion mit „ähnlichen“ Eigenschaften zu konstruieren, wird folgende Definition benötigt:

Definition 5.6 *Seien $f \in L_o^{\geq 0}(\mu)$ und $g \in L_o^{\geq 0}(G)$, so ist die* Faltung von f mit g *für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ definiert durch:*

$$g \circledast f\ (\omega) := \int_G g(x) f(x^{-1} \cdot \omega)\ \gamma(dx).$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli ist $g \circledast f : \Omega \to [0, \infty]$ wohldefiniert und meßbar.

Die wichtigsten Eigenschaften der Faltung stellt das folgende Lemma zusammen.

Lemma 5.7 *Operiert G auf (Ω, μ) $\Delta-$invariant, so gilt:*

i.) Operiert G invariant und sind $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p^{\geq 0}(\mu)$ und $g \in L_1^{\geq 0}(G)$, so ist $g \circledast f \in L_p^{\geq 0}(\mu)$, und es gilt:

$$\|g \circledast f\|_p \leq \|g\|_1\ \|f\|_p$$

ii.) Ist $f \in L_o^{\geq 0}(\mu)$, so ist $\chi_G \circledast f$ bahnenkonstant.

iii.) Ist $f \in L_o^{\geq 0}(\mu)$ bahnenkonstant und, $g \in L_1^{\geq 0}(G)$, so ist auch $g \circledast f$ bahnenkonstant und es gilt für μ-fast alle $\omega \in \Omega$:

$$g \circledast f(\omega) = \|g\|_1\, f(\omega).$$

iv.) Operiert G auf sich selbst vermöge der Gruppenoperation, so entspricht $\circledast$ der „üblichen“ Faltung. In diesem Fall gilt zudem für alle $f \in L_1^{\geq 0}(G)$ und γ-fast alle $x \in G$:

$$\chi_G \circledast f(x) = \|f\|_1 \, .$$

Beweis: zu *i.*) : Der Fall $p = \infty$ ist einfach, und der Fall $p = 1$ ist analog zum Beweis von ([8], 13.5.2.) zu führen. Der Fall $1 < p < \infty$ kann analog zum Beweis von ([8], 14.6.1.) mit Hilfe der *kontinuierlichen Minkowski-Ungleichung* gezeigt werden. Insgesamt wird dieses Aussage also wie für die „übliche“ Faltung bewiesen.
zu *ii.*) : Zu $\omega \in \Omega$ sei $f_\omega(.) := f(.^{-1}\omega) : G \to [0, \infty]$. Damit folgt für $\gamma-$fast alle $x \in G$ und $\mu-$fast alle $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \chi_G \circledast f(x\omega) &= \int_G f(y^{-1}x\omega) \; \gamma(dy) \\ &= \int_G f_\omega(x^{-1}y) \; \gamma(dy) \\ &= \int_G f_\omega(y) \; \gamma(dy) \\ &= \chi_G \circledast f(\omega) \; . \end{aligned}$$

zu *iii.*) : Da f bahnenkonstant ist, gilt für μ-fast alle $\omega \in \Omega$:

$$g \circledast f(\omega) = \int_G g(x) f(x^{-1}\omega)\gamma(dx) = f(\omega) \int_G g \; d\gamma \; .$$

Insbesondere ist $g \circledast f$ bahnenkonstant.
zu *iv.*) : Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Faltung im zweiten Kapitel (vgl. dazu auch [13], 20.10.*i.*). Da für $\gamma-$ fast alle $x \in G$ zudem gilt:

$$\chi_G \circledast f(x) = \int_G f(y^{-1}x)\gamma(dy) = \int_G f(y)\gamma(dx) \; ,$$

ist auch die zweite Behauptung bewiesen. ◀

Operiert nun also zum Beispiel die kompakte Gruppe G invariant auf (Ω, μ), so ist für jedes $f \in L_p^{\geq 0}(\mu)$ die Faltung $\chi_G \circledast f \in L_p^{\geq 0}(\mu)$ und bahnenkonstant. Ist f bahnenkonstant, so gilt sogar $\chi_G \circledast f = f$.

Der nächste Satz zeigt, daß man in gewichteten Normungleichungen für G-invariante Abbildungen die Gewichte mit Hilfe der Faltung verändern kann. Da die Gewichte aus den Sätzen 4.3 und 4.7 im allgemeinen unbekannt sind, wird dieses Verändern der Schlüssel für das weitere Vorgehen sein.

Satz 5.8 *Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$ und G eine lokalkompakte, unimodulare Gruppe, die auf dem Maßraum (Ω, μ) $\Delta-$invariant operiert. Ferner gebe es zu der G-invarianten Abbildung $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, F)$ für ein $1 \leq r < \infty$ Gewichte $w_1, w_2 \in L_o^{>0}(\mu)$, so daß für alle $f \in L_q(\mu, E)$ gilt:*

$$\int_\Omega \|Tf(\omega)\|_F^r \; w_2(\omega) \; \mu(d\omega) \;\; \leq \int_\Omega \|f(\omega)\|_E^r \; w_1(\omega) \; \mu(d\omega) \; .$$

Ist dann $g \in L_o^{\geq 0}(G)$, so gilt für alle $f \in L_q(\mu, E)$ auch:

$$\int_\Omega \|Tf(\omega)\|_F^r \; g \circledast w_2 \; (\omega) \; \mu(d\omega) \;\; \leq \int_\Omega \|f(\omega)\|_E^r \; g \circledast w_1 \; (\omega) \; \mu(d\omega) \; .$$

Beweis: Sind $g \in L_o^{\geq 0}(G)$ und $f \in L_q(\mu, E)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
& \int\limits_\Omega \|Tf(\omega)\|_F^r g \; \circledast w_2 \; (\omega) \; \mu(d\omega) \\
= & \int\limits_\Omega \int\limits_G \|Tf(\omega)\|_F^r \; w_2(x^{-1}\omega) \; g(x) \; \gamma(dx) \; \mu(d\omega) \\
= & \int\limits_G g(x) \; \Delta(x^{-1}) \int\limits_\Omega \|(\tau_x \circ T)f(\omega)\|_F^r \; w_2(\omega) \; \mu(d\omega) \; \gamma(dx) \\
= & \int\limits_G g(x) \; \Delta(x^{-1}) \int\limits_\Omega \|(T \circ \tau_x)f(\omega)\|_F^r \; w_2(\omega) \; \mu(d\omega) \; \gamma(dx) \\
\leq & \int\limits_G g(x) \; \Delta(x^{-1}) \int\limits_\Omega \|\tau_x f(\omega)\|_E^r \; w_1(\omega) \; \mu(d\omega) \; \gamma(dx) \\
= & \int\limits_G g(x) \int\limits_\Omega \|f(\omega)\|_E^r \; w_1(x^{-1}\omega) \; \mu(d\omega) \; \gamma(dx) \\
= & \int\limits_\Omega \|f(\omega)\|_E^r \; g \circledast w_1 \; (\omega) \; \mu(d\omega) \; . \qquad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Ziel wird es also sein, Funktionen $g \in L_o^{\geq 0}(G)$ zu finden, für die $g \circledast w_1$ und $g \circledast w_2$ „schöne“ Eigenschaften besitzen. Wie die Bemerkung nach Lemma 5.7 gezeigt hat, ist in manchen Fällen zum Beispiel $g := \chi_G$ eine solche Funktion. Weitere Fälle werden in den nächsten beiden Abschnitten behandelt.

5.3 Eine Ungleichung für die Fouriertransformation

Bekanntlich ist die Fouriertransformation ein stetiger Operator von $L_1(\mathbb{R}^n)$ nach $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ und eine metrische Bijektion auf $L_2(\mathbb{R}^n)$. Durch Interpolation kann zudem die als Hausdorff-Young-Ungleichung bekannte Stetigkeit von $L_p(\mathbb{R}^n)$ nach $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < 2$ bewiesen werden. Andererseits kann gezeigt werden, daß die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ nur für $p = 2$ von $L_p(\mathbb{R}^n)$ nach $L_p(\mathbb{R}^n)$ definierbar ist. In diesem Abschnitt wird nun mit Hilfe der in dieser Arbeit vorgestellten Techniken eine gewichtete Ungleichung der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)|^r \ |x|^{-nb} dx \le c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \ |x|^{na} dx$$

für geeignete Funktionen f und Konstanten a, b bewiesen. Zuvor werden einige Vorbereitungen, wie die Dualisierung gewichteter Normungleichungen, getroffen.

Im folgenden wird mit σ_{n-1} die „Kugeloberfläche“ der Einheitskugel bezüglich der euklidischen Norm $|.|$ im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Lemma 5.9 *Seien $0 < \varepsilon < 1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann existieren ein $g \in L_{p'}^{\ge 0}(\mathbb{R}^+)$ und ein radiales $h \in L_p^{\ge 0}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h\|_p = 1$, so daß gilt:*

i.) Für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ gilt $(1-\varepsilon)|x|^{-n/p} \le g \circledast h(x)$.

ii.) Für alle radialen $f \in L_p^{\ge 0}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_p \le 1$ ist $g \circledast f \in L_p^{\ge 0}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $g \circledast f(x) \le |x|^{-n/p}$ für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Zunächst gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1/\varepsilon$ und $(\frac{k}{k+\ln k})^{1/p} > 1-\varepsilon$. Es seien $c_1 := (\frac{1}{2\sigma_{n-1}(k+\ln k)})^{1/p}$ sowie $c_2 := \frac{(\sigma_{n-1})^{1/p}}{(2k)^{1/p'}}$. Damit setzt man für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$h(x) := c_1 \chi_{[k^{-1}e^{-k}, ke^k]}(|x|) \ |x|^{-n/p}$$

sowie für alle $t \in \mathbb{R}^+$:

$$g(t) := c_2 \chi_{[e^{-k}, e^k]}(t) \ t^{-n/p} \ .$$

Dann ist h radial, und es gilt: (vgl. [8], 17.9.2.)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |h|^p \ d\lambda^n &= c_1^p \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[k^{-1}e^{-k}, ke^k]}(|x|) \ |x|^{-n} \lambda^n(dx) \\ &= c_1^p \ \sigma_{n-1} \int_0^\infty \chi_{[k^{-1}e^{-k}, ke^k]}(t) \ t^{-1} dt \\ &= 2c_1^p \ \sigma_{n-1} \ \ln(ke^k) = 1 \ . \end{aligned}$$

Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \in [\varepsilon, 1/\varepsilon] \subset [k^{-1}, k]$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} g \circledast h(x) &= c_1 c_2 \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{[k^{-1}e^{-k}, ke^k]}(t^{-1}|x|) \ |t^{-1}x|^{-n/p} \ \chi_{[e^{-k}, e^k]}(t) \ t^{-n/p} \ \lambda^+(dt) \\ &= c_1 c_2 \ |x|^{-n/p} \int_{e^{-k}}^{e^k} \chi_{[k^{-1}e^{-k}, ke^k]}(t^{-1}|x|) \ t^{-1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 c_2 \, |x|^{-n/p} \int_{e^{-k}}^{e^k} t^{-1} dt \\
&= \left(\frac{k}{k + \ln k} \right)^{1/p} |x|^{-n/p} \\
&> (1 - \varepsilon) \, |x|^{-n/p} \, ,
\end{aligned}$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist. Sind nun $f \in L_p^{\geq 0}(\mathbb{R}^n)$ radial, $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| = 1$ und $\tilde{f}(t) := f(ty) \, t^{n/p}$ für $t \in \mathbb{R}^+$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} |\tilde{f}|^p \, d\lambda^+ &= \int_0^\infty |f(ty)|^p \, t^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(|x|y)|^p \, \lambda^n(dx) \\
&= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \lambda^n(dx) \, ,
\end{aligned}$$

das heißt, es ist $\tilde{f} \in L_p^{\geq 0}(\mathbb{R}^+)$ mit $\sigma_{n-1} \|\tilde{f}\|_p^p = \|f\|_p^p$. Weiter gilt, da f radial ist, für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
g \circledast f(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} f(t^{-1}|x|y) \, g(t) \, \lambda^+(dt) \\
&= |x|^{-n/p} \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{f}(t^{-1}|x|) \, t^{n/p} \, g(t) \, \lambda^+(dt) \\
&= c_2 \, |x|^{-n/p} \, (\chi_{[e^{-k}, e^k]} * \tilde{f}) \, (|x|) \, .
\end{aligned}$$

Da $\chi_{[e^{-k}, e^k]} \in L_{p'}^{\geq 0}(\mathbb{R}^+)$ mit $\|\chi_{[e^{-k}, e^k]}\|_{p'} = (2k)^{1/p'}$ ist, folgt mit der Hölderungleichung für λ^n−fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$g \circledast f(x) \ \leq \ c_2 \, |x|^{-n/p} \, \|\chi_{[e^{-k}, e^k]}\|_{p'} \, \|\tilde{f}\|_p \ \leq \ |x|^{-n/p} \, .$$

Ferner ist $\chi_{[e^{-k}, e^k]} \in L_1^{\geq 0}(\mathbb{R}^+)$ und damit $\chi_{[e^{-k}, e^k]} * \tilde{f} \in L_p^{\geq 0}(\mathbb{R}^+)$. Wegen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g \circledast f(x)|^p \, \lambda^n(dx) &= c_2^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_{[e^{-k}, e^k]} * \tilde{f}(|x|) \right|^p |x|^{-n} \, \lambda^n(dx) \\
&= c_2^p \, \sigma_{n-1} \int_0^\infty |\chi_{[e^{-k}, e^k]} * \tilde{f}(t)|^p \, t^{-1} dt \\
&= c_2^p \, \sigma_{n-1} \, \|\chi_{[e^{-k}, e^k]} * \tilde{f}\|_p^p \ < \ \infty
\end{aligned}$$

folgt dann auch die zweite Behauptung. ◀

Das nächste Lemma ermöglicht es, bestimmte gewichtete Normungleichungen zu dualisieren.

Lemma 5.10 *Sind $1 < q < r < \infty$, $\frac{1}{\alpha} := \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$, F ein reflexiver Banachraum und $T : L_q(\mu, E) \to L_q(\nu, F)$ ein stetiger und linearer Operator mit $T(L_{q'}(\nu, F')) \subset L_{q'}(\mu, E')$, so sind für $u \in L_{\alpha/r'}^{\geq 0}(\mu)$ und $w \in L_{\alpha/r'}^{\geq 0}(\nu)$ äquivalent:*

i.) Für alle $f \in L_{q'}(\nu, F')$ gilt:

$$\int_\Omega \|T'f(x)\|_{E'}^{r'} u(x)\mu(dx) \leq \int_O \|f(y)\|_{F'}^{r'} w(y)\nu(dy).$$

ii.) Für alle $f \in L_q(\mu, E)$ gilt:

$$\int_O \|Tf(y)\|_F^r w^{-r/r'}(y)\nu(dy) \leq \int_\Omega \|f(x)\|_E^r u^{-r/r'}(x)\mu(dx).$$

Beweis: i.) $\to$ ii.) : Setzt man $g := w^{1/r'}$ und $h := u^{1/r'}$, so ist der Multiplikationsoperator $M_g : L_{q'}(\nu, F') \to L_{r'}(\nu, F')$ definiert, linear und stetig. Nach Voraussetzung ist ferner die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} (\mathfrak{Im}\ M_g, \|.\|_{r'}) & \to & L_{r'}(\mu, E') \\ gf & \mapsto & hT'f \end{array}$$

definiert und stetig. Nach Korollar 1.13 existiert demnach eine Fortsetzung $S : L_{r'}(\nu, F') \to L_{r'}(\mu, E')$ mit $\|S\| \leq 1$. Aufgrund der Konstruktion gilt zudem $SM_g = M_h T'$. Durch Dualisieren ergibt sich dann mit der Reflexivität von F das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} L_r(\mu, E) \subset L_{r'}(\mu, E')' \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "M_h"', "(M_h)'"] & L_{r'}(\nu, F')' = L_r(\nu, F) \arrow[d, "(M_g)' = M_g"] \\ L_q(\mu, E) \subset L_{q'}(\mu, E')' \arrow[r, "T''"'] & L_{q'}(\nu, F')' = L_q(\nu, F) \end{tikzcd}$$

Sei nun $f \in \mathfrak{Im}\ M_h \subset L_q(\mu, E)$. Nach Lemma 1.14 ist dann $h^{-1}f \in L_r(\mu, E)$. Das Diagramm impliziert somit $gS'h^{-1}f = T''f = Tf$. Da $Tf \in \mathfrak{Im}\ M_g$ ist, folgt mit Lemma 1.14 dann auch $S'h^{-1}f = g^{-1}Tf$. Wegen $\|S'\| \leq 1$ gilt damit:

$$\begin{array}{rcl} \int_O \|Tf(y)\|_F^r w^{-r/r'}(y)\nu(dy) & = & \|g^{-1}Tf\|_r^r \\ & = & \|S'h^{-1}f\|_r^r \\ & \leq & \|h^{-1}f\|_r^r \\ & = & \int_\Omega \|f(x)\|_E^r u^{-r/r'}(x)\mu(dx)\ . \end{array}$$

Da für $f \in L_q(\mu, E) \setminus \mathfrak{Im}\ M_h$ ferner

$$\int_\Omega \|f(x)\|_E^r u^{-r/r'}(x)\mu(dx) = \infty$$

gilt, ist die Behauptung bewiesen.
Die Implikation *ii.)* $\to$ *i.)* kann analog bewiesen werden, sie wird jedoch im folgenden nicht benötigt. ◀

Das eben bewiesene Lemma ist in vielen Fällen nützlich, da Gewichte mit negativen Exponenten häufig schwieriger zu handhaben sind, als solche mit positiven Exponenten.
Mit dem jetzt vorliegendem Wissen kann für einen dilatations- und rotationsinvarianten Operator $T : L_q(\mathbb{R}^n, E) \to L_q(\mathbb{R}^n, F)$ aus $\mathsf{m}_r(T) < \infty$ auf eine gewichtete Normungleichung mit Gewichten der Form $(x \to |x|^a)$ geschlossen werden, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 5.11 *Seien* $1 \leq r \leq q < \infty$ *und* $T : L_q(\mathbb{R}^n, E) \to L_q(\mathbb{R}^n, F)$ *ein* $\lambda-$*homogener, rotations- und dilatationsinvarianter Operator mit* $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$ *sowie* $a := n(\frac{r}{q} - 1)$*. Dann gilt für alle* $f \in L_q(\mathbb{R}^n, E)$*:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r \; |x|^a \; \lambda^n(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; |x|^a \; \lambda^n(dx) \ .$$

Ist T *linear mit* $T'(L_{q'}(\mathbb{R}^n, F')) \subset L_{q'}(\mathbb{R}^n, E')$ *und* F *reflexiv, so gilt die Aussage auch für* $1 < q < r < \infty$*.*

Beweis: Seien $0 < \varepsilon < 1$, ohne Einschränkung $1 \leq r < q < \infty$ und $\frac{1}{p} := 1 - \frac{r}{q}$. Ferner seien Funktionen h und g gemäß Lemma 5.9 gewählt. Zu h gibt es dann nach Satz 4.7 ein $w \in L_p^{\geq 0}(\mathbb{R}^n)$, so daß für alle $f \in L_q(\mathbb{R}^n, E)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r \; h(x) \; \lambda^n(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; w(x) \; \lambda^n(dx) \ .$$

Da T rotationsinvariant ist, erfüllt T nach Satz 5.8 eine solche Ungleichung auch mit den Gewichten $\chi_{\mathsf{SO}(n)} \circledast h$ und $\chi_{\mathsf{SO}(n)} \circledast w$ beziehungsweise im Fall $n = 1$ mit $\chi_{\mathsf{ON}(n)} \circledast h$ und $\chi_{\mathsf{ON}(n)} \circledast w$. Nach den im Lemma 5.7 aufgeführten Eigenschaften der Faltung kann also ohne Einschränkung angenommen werden, daß neben h auch w radial ist. Wendet man nun den Satz 5.8 erneut an, so ergibt sich wegen der Dilatationsinvarianz von T für alle $f \in L_q(\mathbb{R}^n, E)$:

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon) \int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \|Tf(x)\|_F^r \; |x|^{-n/p} \; \lambda^n(dx) &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r \; g \circledast h(x) \; \lambda^n(dx) \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; g \circledast w(x) \; \lambda^n(dx) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; |x|^{-n/p} \; \lambda^n(dx) \ . \end{aligned}$$

Wegen $a = -n/p$ folgt dann für $\varepsilon \to 0$ die Behauptung.
Ist nun $1 < q < r < \infty$ und T gemäß des Zusatzes, so sei $\frac{1}{p} := 1 - \frac{r'}{q'}$. Zu

$i \in \mathbb{N}$ sei ferner $A_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1/i \le |x| \le i\}$. Setzt man nun für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$w_i(x) := (1 - \frac{1}{i})\ \chi_{A_i}(x)\ |x|^{-n/p}\ ,$$

so ist $w_i \in L_p^{\ge 0}(\mathbb{R}^n)$. Wendet man den eben bewiesenen Fall auf T' an, so ergibt sich für alle $f \in L_{q'}(\mathbb{R}^n, F')$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|T'f(x)\|_{E'}^{r'}\ w_i(x)\ \lambda^n(dx) \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_{F'}^{r'}\ g \circledast w(x)\ \lambda^n(dx)\ ,$$

wobei $w \in L_p^{\ge 0}(\mathbb{R}^n)$ radial ist, und $g \in L_{p'}^{\ge 0}(\mathbb{R}^+)$ gemäß Lemma 5.9 zu $\varepsilon := \frac{1}{i}$ gewählt wurde. Nach Lemma 5.9 ist dann auch $g \circledast w \in L_p^{\ge 0}(\mathbb{R}^n)$. Durch Dualisieren nach Lemma 5.10 ergibt sich dann wegen $a = \frac{nr}{pr'}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r\ |x|^a\ \lambda^n(dx) &\le \int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r\ (g \circledast w)^{-r/r'}(x)\ \lambda^n(dx) \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r\ w_i^{-r/r'}(x)\ \lambda^n(dx) \\
&\le (1 - 1/i)^{-r/r'} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r\ \chi_{A_i}^{-1}(x)|x|^a\ \lambda^n(dx)
\end{aligned}$$

für alle $f \in L_q(\mathbb{R}^n, E)$. Bedauerlicherweise ist das letzte Integral jedoch nur für Funktionen $f \in L_q(\mu, E)$ mit $\{f \ne 0\} \subset A_i$ endlich. Daher muß beim Grenzübergang $i \to \infty$ behutsamer argumentiert werden: Sei $j \in \mathbb{N}$, $f \in L_q(\mu, E)$ und $f_j := \chi_{A_j} f$, so ist $\{f_j \ne 0\} \subset A_i$ für alle $i \ge j$. Daher folgt mit $i \to \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf_j(x)\|_F^r\ |x|^a\ \lambda^n(dx) \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f_j(x)\|_E^r\ |x|^a\ \lambda^n(dx)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Die Folge f_j konvergiert fast überall punktweise gegen f, und es gilt auch $\|f_j\|_q^q \to \|f\|_q^q$. Damit konvergiert die Folge f_j auch bezüglich $\|.\|_q$ gegen f (vgl. dazu Satz 15.4. von [1], in dessen Beweis $|.|$ durch $\|.\|_E$ ersetzt werden kann). Wegen der Stetigkeit von T konvergiert dann (Tf_j) gegen Tf bezüglich $\|.\|_q$. Also existiert eine Teilfolge (Tf_{j_k}), so daß $(\|Tf_{j_k}(x)\|_F)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\|Tf(x)\|_F$ konvergiert. Mit dem Lemma von Fatou folgt daher insgesamt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r\ |x|^a\ \lambda^n(dx) &= \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} \|Tf_{j_k}(x)\|_F^r\ |x|^a\ \lambda^n(dx) \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \|Tf_{j_k}(x)\|_F^r\ |x|^a\ \lambda^n(dx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f_{j_k}(x)\|_E^r \; |x|^a \; \lambda^n(dx) \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; |x|^a \; \lambda^n(dx) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; |x|^a \; \lambda^n(dx) \; ,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ◀

Es wird jetzt noch ein Lemma benötigt, das den „Rechenaufwand“ für den Beweis der angekündigten gewichteten Normungleichung der Fouriertransformation begrenzt.

Lemma 5.12 *Ist $x^* := x/|x|^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt für alle $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x^*) \; |x|^{-2n} \; \lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \; \lambda^n(dx) \; .$$

Beweis: Ist $S_{n-1}(r)$ die Sphäre im $\mathbb{R}^n$ mit Radius r und $\lambda_{S_{n-1}(r)}$ ihr Oberflächenmaß, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x^*) \; |x|^{-2n} \; \lambda^n(dx) &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S_{n-1}(r)} f(\xi^*) \; |\xi|^{-2n} \; \lambda_{S_{n-1}(r)}(d\xi) \; dr \\
&= \int\limits_0^\infty r^{-2n} \int\limits_{S_{n-1}(r)} f(\xi/r^2) \; \lambda_{S_{n-1}(r)}(d\xi) \; dr \\
&= \int\limits_0^\infty r^{-2n} \int\limits_{S_{n-1}(1/r)} f(\xi) \; r^{2(n-1)} \; \lambda_{S_{n-1}(1/r)}(d\xi) \; dr \\
&= \int\limits_0^\infty r^{-2} \int\limits_{S_{n-1}(1/r)} f(\xi) \; \lambda_{S_{n-1}(1/r)}(d\xi) \; dr \\
&= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S_{n-1}(r)} f(\xi) \; \lambda_{S_{n-1}(r)}(d\xi) \; dr \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \; \lambda^n(dx) \; . \quad ◀
\end{aligned}$$

Wird nun also $I_2 f(x) := f(x^*)|x|^{-n}$ für $f \in L_o(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gesetzt, so ist $I_2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ eine metrische Injektion. Wie man leicht nachrechnen kann, ist ferner $I_2^2 f = f$ für alle $f \in L_o(\mathbb{R}^n)$. Damit kann nun gezeigt werden:

Satz 5.13 *Sei $1 < r < \infty$. Ferner sei*

im Fall $r \le 2$:

$$a \in [0, r-1[\ , \qquad p := \frac{r}{a+1}\ , \qquad H := L_p(\mathbb{R}^n) \qquad \text{und}$$

im Fall $r > 2$:

$$a \in [r-2, r-1[\ , \qquad p := \frac{r}{r-a-1}\ ,$$
$$H := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\ |x|^{n(p-2)} dx < \infty \right\} .$$

Es existiert dann eine Konstante $c_{r,a} > 0$, so daß mit $b := a - r + 2$ für alle $f \in H$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)|^r\ |x|^{-nb}\ dx \le c_{r,a} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r\ |x|^{na}\ dx\ . \tag{5.2}$$

Man beachte dabei, daß aufgrund der Definition $0 \le b < 1$ ist. Besonders einfach sind die Fälle, in denen a *minimal* gewählt wird. Für $r \le 2$ ist dann $a = 0$, $H = L_r(\mathbb{R}^n)$ und $b = 2 - r$, der Ungleichung (5.2) entspricht also

$$\left\| \mathcal{F} : L_r(\mathbb{R}^n) \to L_r(|x|^{n(r-2)} dx) \right\| \le c_{r,a}\ .$$

Im Fall $r > 2$ ist dagegen $a = r - 2$, $p = r$ und $b = 0$ Die Ungleichung (5.2) kann daraufhin als

$$\| \mathcal{F} : L_r(|x|^{na} dx) \to L_r(\mathbb{R}^n) \| \le c_{r,a}\ .$$

verstanden werden.

Beweis: Zu $f \in L_1(\mathbb{R}^n) + L_2(\mathbb{R}^n)$ sei $Tf := I_2 \mathcal{F} f$. Dann ist der Operator $T : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie. Da für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)| = \|\mathcal{F}f\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$$

ist, folgt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid\ |Tf(x)| > \varepsilon\}) &= \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid\ |\mathcal{F}f(x^*)\ |x|^{-n}| > \varepsilon\}) \\ &\le \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1 |x|^{-n} > \varepsilon\}) \\ &= (2\pi)^{-n/2}\ \lambda^n(B_{\ell_2^n})\ \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}\ . \end{aligned}$$

Also ist $T : L_1(\mathbb{R}^n) \to L_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ definiert und vom schwachen Typ $(1,1)$. Durch Anwenden der Transformationsformel des Lebesguemaßes im $\mathbb{R}^n$

kann außerdem leicht gezeigt werden, daß T rotations- und dilatationsinvariant ist.
Es wird nun zunächst der Fall $r \leq 2$ behandelt. Nach Definition ist dann $1 < p \leq r \leq 2$. Mit dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz (siehe dazu [3], Kap. 4, 4.13.) ist T daher auch ein stetiger Operator von $L_p(\mathbb{R}^n)$ nach $L_p(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Sätze 3.15 respektive 3.7 gilt zudem $c := \mathsf{m}_r(T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)) < \infty$. Der Satz 5.11 ergibt dann für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^r \; |x|^{n(r/p-1)} \; \lambda^n(dx) \;\leq\; c^r \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \; |x|^{n(r/p-1)} \; \lambda^n(dx) \; .$$

Setzt man nun $c_{r,a} := c^r$, so folgt wegen $a = r/p - 1$ und dem Lemma 5.12 für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)|^r \; |x|^{-nb} \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x^*)|^r \; |x^*|^{-nb} \; |x|^{-2n} \; dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| |\mathcal{F}f(x^*) \; |x|^{-n} \Big|^r \; |x|^{n(b+r-2)} \; dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^r \; |x|^{na} \; dx \\ &\leq c_{r,a} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \; |x|^{na} \; dx \; .\end{aligned}$$

Im Falle $2 < r < \infty$ ist nach Definition $1 < p' \leq r' < 2$. Nach dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz ist dann T ein stetiger Operator von $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ nach $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ mit $c := \mathsf{m}_{r'}(T : L_{p'}(\mathbb{R}^n) \to L_{p'}(\mathbb{R}^n)) < \infty$. Der Satz 5.11 auf den dualen Operator $T' : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ angewendet impliziert dann wegen $b = 1 - \frac{r}{p}$ für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ die Ungleichung:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T'f(x)|^r \; |x|^{-nb} \; \lambda^n(dx) \;\leq\; c_{r,a} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \; |x|^{-nb} \; \lambda^n(dx) \; ,$$

wobei $c_{r,a} := c^r$ ist. Wegen $T'f = \mathcal{F}' I_2 f$ für $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ und $I_2^2 = id_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ gilt nun für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $I_2 f \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)|^r \; |x|^{-nb} \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}'f(x)|^r \; |x|^{-nb} \; dx \\ &\leq c_{r,a} \int_{\mathbb{R}^n} |I_2 f(x)|^r \; |x|^{-nb} \; dx \\ &= c_{r,a} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x^*)|^r \; |x|^{-n(b+r)} \; dx \\ &= c_{r,a} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \; |x|^{na} \; dx \; .\end{aligned}$$

Da nun für $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $I_2 f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ nach Lemma 5.12 gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |I_2 f|^p \, d\lambda^n &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| f(x^*) \; |x|^{-n} \right|^p dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| |f(x)| \; |x^*|^{-n} \right|^p |x|^{-2n} \, dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \; |x|^{n(p-2)} \, dx \ ,\end{aligned}$$

ist die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen. ◀

5.4 Translationsinvariante Operatoren

Im Blickpunkt dieses Abschnitts steht die Fortsetzbarkeit translationsinvarianter Operatoren über kompakten Gruppen und dem $\mathbb{R}^n$. Zur Untersuchung dienen dabei wieder neben den Sätzen des dritten und vierten Kapitels die Faltungstechniken des Abschnitts 5.2 .

Zur Vereinfachung wird zunächst die folgende Sprechweise eingeführt:

Definition 5.14 *Sind* $0 \leq p, q \leq \infty$ *und* $0 < r < \infty$*, so heißt ein* μ*-homogener und in 0 stetiger Operator* $T : L_q(\mu, E) \to L_p(\mu, F)$ r-erweiterbar*, falls* $L_q(\mu, E) \cap L_r(\mu, E)$ *unter* T *nach* $L_r(\mu, F)$ *abgebildet wird und es eine Konstante* $c > 0$ *gibt, so daß für alle* $f \in L_q(\mu, E) \cap L_r(\mu, E)$ *gilt:*

$$\|Tf\|_r \leq c \, \|f\|_r \ .$$

Das kleinste solche c wird in diesem Fall mit $\|T\|_r$ *bezeichnet.*

Ist mit den obigen Bezeichnungen T $r-$erweiterbar, so ist die Abbildung

$$T : (L_q(\mu, E) \cap L_r(\mu, E), \|.\|_r) \to L_r(\mu, F)$$

demnach definiert, $\mu-$homogen und in 0 stetig. Ihre Norm beträgt zudem gerade $\|T\|_r$. Da $L_q(\mu, E) \cap L_r(\mu, E)$ dicht in $L_r(\mu, E)$ ist, läßt sich T also in diesem Fall zu einem in 0 stetigen Operator $L_r(\mu, E) \to L_r(\mu, F)$ *erweitern.*
Die Sätze dieses Abschnittes werden nun zeigen, daß für translationsinvariante Operatoren die $r-$Erweiterbarkeit häufig aus einer Marcinkiewicz-Zygmund Ungleichung in r folgt.

Satz 5.15 *Seien* $0 < p, q, r < \infty$ *und* G *eine kompakte Gruppe mit Haarmaß* γ*. Ferner sei* $T : L_q(\gamma, E) \to L_p(\gamma, F)$ *ein translationsinvarianter,*

γ-homogener und in 0 stetiger Operator. Ist dann $\mathsf{m}_r(T) < \infty$, so ist T auch $r-$erweiterbar.
Im Fall $p \leq r \leq q$ folgt aus der $r-$Erweiterbarkeit umgekehrt auch $\mathsf{m}_r(T) < \infty$.

Beweis: Ohne Einschränkung kann $\mathsf{m}_r(T) \leq 1$ angenommen werden. Es sei nun $p_1 := \min\{p, r\}$, $q_1 := \max\{q, r\}$ und $\frac{1}{\beta_1} := \frac{1}{r} - \frac{1}{q_1}$, $\frac{1}{\beta_2} := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{r}$. Nach Satz 4.7 gibt es dann zu $u_1 := u_2 :\equiv 1$ Gewichte $w_1 \in \mathcal{W}_{\beta_1/r}(\gamma)$ und $w_2 \in \mathcal{W}_{\beta_2/r}(\gamma)$, so daß für alle $f \in L_{q_1}(\gamma, E) = L_q(\gamma, E) \cap L_r(\gamma, E)$ gilt:

$$\int_G \|Tf(x)\|_F^r w_2^{-1}(x)\ \gamma(dx) \ \leq \ \int_G \|f(x)\|_E^r w_1(x)\ \gamma(dx)\ .$$

Aus $\beta_1/r \geq 1$ folgt nun $w_1 \in L_1(\gamma)$. Setzt man $\tilde{w}_2 := w_2 + 1$, so ist einerseits $\tilde{w}_2^{-1} \in L_\infty(\gamma) \subset L_1(\gamma)$, und andererseits folgt für alle $f \in L_{q_1}(\gamma, E)$:

$$\int_G \|Tf(x)\|_F^r \tilde{w}_2^{-1}(x)\ \gamma(dx) \ \leq \ \int_G \|f(x)\|_E^r w_1(x)\ \gamma(dx).$$

Durch Anwendung des Satzes 5.8 auf den Operator $T : L_{q_1}(\gamma, E) \to L_p(\gamma, F)$ folgt daher für alle $f \in L_{q_1}(\gamma, E)$:

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{w}_2^{-1}\right\|_1 \int_G \|Tf(x)\|_F^r\ \gamma(dx) &= \int_G \|Tf(x)\|_F^r\ \chi_G * \tilde{w}_2^{-1}(x)\ \gamma(dx) \\ &\leq \int_G \|f(x)\|_E^r\ \chi_G * w_1(x)\ \gamma(dx) \\ &= \|w_1\|_1 \int_G \|f(x)\|_E^r\ \gamma(dx)\ . \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt T r-erweiterbar und $p \leq r \leq q$, so folgt sofort:

$$\mathsf{m}_r(T : L_q(\gamma, E) \to L_p(\gamma, F)) \leq \mathsf{m}_r(T : L_r(\gamma, E) \to L_r(\gamma, F)) = \|T\|_r\ . \blacktriangleleft$$

Sind die Räume E, F selber wieder L_p-Räume, so ergeben sich aus 3.7, 3.15 und 3.16 sofort Verteilungen, bei denen *jeder* translationsinvariante Operator $r-$erweiterbar ist:

Korollar 5.16 *Ein linearer, stetiger und translationsinvarianter Operator $T : L_q(\gamma, L_{q_1}(\mu)) \to L_p(\gamma, L_{p_1}(\nu))$ läßt sich in den folgenden Fällen $r-$erweitern:*

i.) $r = 2$, falls $1 \leq p_1 \leq 2 \leq q_1 < \infty$ und $1 \leq p, q < \infty$;

ii.) $r < 2$, falls $0 < q < r < q_1 < \infty$ und $1 \leq p, p_1 \leq \infty$;

iii.) $r > 2$ falls $1 < p_1 < r < p < \infty$ und $1 < q_1, q < \infty$.

Für Einpunktmaße μ und ν, das heißt für Operatoren $L_q(\gamma) \to L_p(\gamma)$, erübrigen sich die Bedingungen an p_1 und q_1. So ist beispielsweise jeder translationsinvariante Operator $L_q(\gamma) \to L_p(\gamma)$ 2-erweiterbar. Mit Hilfe von 2.9 und 2.15 können jedoch noch schärfere Resultate erzielt werden:

Korollar 5.17 *Sind* $1 < q < \infty$ *und* $T : L_q(G) \to L_o(G)$ *linear, stetig und translationsinvariant, so ist* T *in den folgenden Fällen* $r-$*erweiterbar:*

i.) $r = 2$;

ii.) $1 < q < r < 2$;

iii.) T *positiv und* $1 \leq r < \infty$.

Beweis: Nach 2.9 und 2.15 ist T in den ersten beiden Fällen zunächst vom schwachen Typ (q,p) für $p := \min\{2, q\}$. Da für $\varepsilon > 0$ mit $p - \varepsilon \geq 1$ zudem $id : L_{p,\infty}(G) \to L_{p-\varepsilon}(G)$ stetig ist, folgt dann die Behauptung aus Korollar 5.16.
Im dritten Fall ist T nach 2.6 und 2.15 vom schwachen Typ (q,q). Wie eben ist also $T : L_q(G) \to L_{q-\varepsilon}(G)$ definiert und stetig. Da nach 3.6 zudem $\mathsf{m}_r(T : L_q(G) \to L_{q-\varepsilon}(G)) < \infty$ ist, folgt mit 5.15 die Behauptung. ◀

Zafran hat in [35] gezeigt, daß für $1 < p < 2$ translationsinvariante Operatoren vom schwachen Typ (p,p) im allgemeinen nicht vom starken Typ (p,p) sind. Nach Korollar 5.17 sind diese jedoch zumindest vom starken Typ (r,r) für $1 < p < r < 2$. Zugleich zeigt das Korollar, daß *positive* Operatoren vom schwachen Typ (p,p) *immer* auch vom starken Typ (p,p) sind.

Im folgenden sei $G = \mathbb{R}^n$ oder $G = \mathbb{Z}$. Mit γ sei ferner das Lebesgue-Maß bzw. das Zählmaß bezeichnet. In beiden Fällen wird sich zeigen, daß es keine nichttrivialen, translationsinvarianten Operatoren $T \in \mathcal{L}(L_q(G), L_p(G))$ für $0 < p < q < \infty$ gibt.

Lemma 5.18 *Seien* $1 \leq p < \infty$ *und* $f \in L_p(G)$*, so gilt:*

$$\lim_{|x| \to \infty} \|f + \tau_x f\|_p = 2^{1/p} \ \|f\|_p$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, so existiert ein $g \in C_{oo}(\mathbb{R}^n)$, beziehungsweise ein $g := \sum_{x=-n}^{n} \alpha_x e_x$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$. In beiden Fällen existiert dann ein $x_o \in \mathbb{R}^n$ respektive $x_o \in \mathbb{Z}$, so daß supp g $\cap$supp $\tau_x g = \emptyset$ für alle $|x| \geq |x_o|$ ist. Es folgt daher für $|x| \geq |x_o|$:

$$\|g + \tau_x g\|_p \quad = \quad \left(\int_G |g(y) + g(x+y)|^p \ \gamma(dy) \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_G |g(y)|^p + |g(x+y)|^p \; \gamma(dy) \right)^{1/p} \\ &= \left(2\|g\|_p^p \right)^{1/p} = 2^{1/p} \|g\|_p \; . \end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit für $|x| \geq |x_o|$:

$$\begin{aligned} & \left| \|f + \tau_x f\|_p - 2^{1/p} \|f\|_p \right| \\ = \; & \left| \|f + \tau_x f\|_p - \|g + \tau_x g\|_p + 2^{1/p} \|g\|_p - 2^{1/p} \|f\|_p \right| \\ \leq \; & \|f - g\|_p + \|\tau_x (f-g)\|_p + 2^{1/p} \|f - g\|_p \\ < \; & (2 + 2^{1/p}) \; \varepsilon \; , \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ◀

Damit kann nun der schon angekündigte Satz, der auf Hörmander zurückgeht, bewiesen werden:

Satz 5.19 *Sind $0 < p < q < \infty$ und $T : L_q(G) \to L_p(G)$ stetig, linear und translationsinvariant, so ist $T = 0$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $2^{1/q - 1/p} < 1$. Ist jetzt $f \in L_q(G)$, so gilt $\|Tf + \tau_x T f\|_p \leq \|T\| \, \|f + \tau_x f\|_q$. Für $|x| \to \infty$ ergibt das Lemma 5.18 daher $\|Tf\|_p \leq 2^{1/q-1/p} \, \|T\| \, \|f\|_q$. Daraus folgt aber schon $\|T\| = 0$. ◀

Für die weiteren Betrachtungen wird zunächst ein zu 5.9 analoges Lemma bewiesen. Ist $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, so bezeichne dazu im folgenden $[-a, a]$ die Kugel um 0 mit Radius a bezüglich der Maximumsnorm im $\mathbb{R}^n$. Es ist dann $\lambda^n([-a, a]) = (2a)^n$.

Lemma 5.20 *Sind $0 < \varepsilon < 1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, dann existieren ein $g \in L_{p'}^{\geq 0}(\mathbb{R}^n) \cap L_1^{\geq 0}(\mathbb{R}^n)$ und ein $h \in L_p^{\geq 0}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|g\|_{p'} = \|h\|_p = 1$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ gilt:*

$$g * h(x) \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis: Zunächst gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\ln k > 1/\varepsilon$ und $(\frac{k}{k + \ln k})^{n/p} > 1 - \varepsilon$. Man setzt nun $c_1 := (\frac{1}{2k})^{n/p'}$ und $c_2 := \left(\frac{1}{2(k + \ln k)} \right)^{n/p}$. Ferner seien für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x) := c_1 \; \chi_{[-k,k]}(x)$$

sowie

$$h(x) := c_2 \; \chi_{[-k - \ln k, k + \ln k]}(x) \; .$$

Es gilt dann:

$$\|g\|_{p'}^{p'} = c_1^{p'} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-k,k]} \, d\lambda^n = (2k)^{-n}(2k)^n = 1$$

und

$$\|h\|_p^p = c_2^p \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-k-\ln k, k+\ln k]} \, d\lambda^n = \left(\frac{1}{2(k+\ln k)}\right)^n \Big(2(k+\ln k)\Big)^n = 1 \; .$$

Da ferner für $x \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon] \subset [-\ln k, \ln k]$ gilt:

$$\begin{aligned}
g * h(x) &= c_1 c_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-k-\ln k, k+\ln k]}(x-y) \; \chi_{[-k,k]}(y) \; \lambda^n(dy) \\
&= c_1 c_2 \int\limits_{[-k,k]} \chi_{[-k-\ln k, k+\ln k]}(x-y) \; \lambda^n(dy) \\
&= c_1 c_2 \int\limits_{[-k,k]} 1 \; \lambda^n(dy) \\
&= (2k)^{-n/p'} \left(\frac{1}{2(k+\ln k)}\right)^{n/p} (2k)^n \\
&= \left(\frac{k}{k+\ln k}\right)^{n/p} > 1-\varepsilon \; ,
\end{aligned}$$

ist die Behauptung bewiesen. ◀

Damit kann nun die r-Erweiterbarkeit von translationsinvarianten Operatoren über dem $\mathbb{R}^n$ untersucht werden:

Satz 5.21 *Seien $1 \le r < q < \infty$ und $T : L_q(\mathbb{R}^n, E) \to L_q(\mathbb{R}^n, F)$ ein λ^n-homogener, in 0 stetiger und translationsinvarianter Operator. Gilt dann $\mathsf{m}_r(T) \le 1$, so ist T $r-$erweiterbar und es gilt $\|T\|_r \le 1$.*
Ist T linear und $T'(L_{q'}(\mathbb{R}^n, F')) \subset L_{q'}(\mathbb{R}^n, E')$ und F reflexiv, so gilt die Implikation auch im Fall $1 < q < r < \infty$.

Beweis: Seien $0 < \varepsilon < 1$, $\frac{1}{p} := 1 - \frac{r}{q}$, sowie h und g gemäß Lemma 5.20 gewählt. Zu h gibt es dann nach Satz 4.7 ein $w \in \mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n)$, so daß für alle $f \in L_q(\mathbb{R}^n, E)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r \; h(x) \; \lambda^n(dx) \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; w(x) \; \lambda^n(dx) \; .$$

Nun ist zunächst $g * w \; (x) \le \|g\|_{p'} \cdot \|w\|_p \le 1$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da ferner T translationsinvariant ist, folgt mit Satz 5.8 und Lemma 5.20 für alle $f \in L_q(\mathbb{R}^n, E)$:

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon) \int\limits_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]} \|Tf(x)\|_F^r \; \lambda^n(dx) &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_F^r \; g*h(x) \; \lambda^n(dx) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; g*w(x) \; \lambda^n(dx) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^r \; \lambda^n(dx) \; .
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt dann die Behauptung.
Der Beweis des Falles $1 < q < r < \infty$ kann ebenfalls völlig analog zum Beweis vom Satz 5.11 geführt werden. ◀

Der Satz 5.21 hat eine interessante Konsequenz für singuläre Integraloperatoren: Dazu sei zunächst bemerkt, daß $L_q(\mathbb{R}^{n+m}) = L_q(\mathbb{R}^n, L_q(\mathbb{R}^m))$ für $1 < q < \infty$ ist. Ist nun $T : L_q(\mathbb{R}^{n+m}) \to L_q(\mathbb{R}^{n+m})$ ein singulärer Integraloperator, so gilt $\mathsf{m}_r(T : L_q(\mathbb{R}^n, L_q(\mathbb{R}^m)) \to L_q(\mathbb{R}^n, L_q(\mathbb{R}^m))) < \infty$ für $1 < r < \infty$ (siehe dazu [11]). Damit ist T also r-erweiterbar, das heißt T kann als ein stetiger Operator

$$T : L_r(\mathbb{R}^n, L_q(\mathbb{R}^m)) \to L_r(\mathbb{R}^n, L_q(\mathbb{R}^m))$$

aufgefaßt werden. Dieses Resultat wurde 1962 von Benedek, Calderón und Panzone in [2] bewiesen. Einen anderen Beweis findet man in ([11]).

Wie für kompakte Gruppen können mit den Sätzen 3.7, 3.15 und 3.16 einfache Fälle aufgelistet werden, in denen jeder translationsinvariante Operator erweiterbar ist.

Korollar 5.22 *Ein linearer, stetiger und translationsinvarianter Operator $T : L_q(\mathbb{R}^n, L_{q_1}(\mu)) \to L_q(\mathbb{R}^n, L_{p_1}(\nu))$ läßt sich in den folgenden Fällen r-erweitern:*

i.) $r = 2$, *falls* $1 < p_1 \leq 2 \leq q_1 < \infty$ *und* $1 < q < \infty$

ii.) $r < 2$, *falls* $1 < q < r < q_1 < \infty$ *und* $1 < p_1 < \infty$

iii.) $r > 2$, *falls* $1 < p_1 < r < q < \infty$ *und* $1 < q_1 < \infty$

Zudem ergibt sich für translationsinvariante Operatoren $L_q(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ leicht die r-Erweiterbarkeit in den Fällen $1 < q < r \leq 2$ und $2 \leq r < q < \infty$ sowie für positive Operatoren. Diese Ergebnisse können jedoch auch mit anderen, einfacheren Methoden für *beliebige* lokalkompakte Gruppen bewiesen werden (vgl. dazu [17], Satz 4.1.3., die Korollare 4.1.3. und 4.1.4., sowie für positive Operatoren den Satz 3.6.1.).

5.5 Bemerkungen und Ausblicke

Der Satz 5.3 wurde unabhängig von Maurey und Nahoum 1973 und Bennett 1976 für $q = 1$ bewiesen. Die Darstellung des Beweises ist an [6], 12.32. angelehnt. Der hier vorgestellte Beweis ist jedoch einfacher, da die Faktorisierung durch ℓ_2 und $L_2(\mu)$ nicht mit Hilfe der Faktorisierungssätze von Pietsch und Maurey erzielt wird, wie dies in [6] geschieht. Durch den Satz von Nikishin aus dem zweiten Kapitel kann der Satz 5.3 für *endliche* Maße μ auf unbedingt summierbare Folgen in $L_o(\mu)$ ausgedehnt werden. Dieses findet sich in ([34], III.H.17.). Für eine genauere geschichtliche Beschreibung sei ebenfalls auf ([34], S. 282) verwiesen.
Die Ideen für die Faltungstechniken sind aus den Beweisen 2.14 und 5.11 in ([9], VI.2.8., beziehungweise VI.7.1.) entstanden. Sie dienen vor allem einem systematischen Zugang und verhindern zudem übermäßig viele Berechnungen in den letzten beiden Abschnitten.
Eine Variante des Satzes 5.13 für die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}$ wurde von Pitt 1937 bewiesen. Eine allgemeinere Form seiner Ergebnisse findet sich in ([30], 4.1.). Der Zugang zum Beweis des Satzes ist ([9], VI.7.4.) entnommen. Dort werden auch noch weitere Anwendungen des Satzes 5.11 beschrieben.
Eine ausführliche Übersicht über die Erweiterbarkeit und Darstellung translationsinvarianter Operatoren im skalarwertigen Fall findet sich in den Kapiteln 3, 4 und 5 von [17].

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter, 1990

[2] A. Benedek, A.P. Calderón und R. Panzone, Convolution Operators on Banach Space Valued Functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 48 (1962), S. 356-365

[3] C. Bennett und R. Sharpley, Interpolation of Operators, Pure and Applied Mathematics 129, Academic Press, 1988

[4] A. Defant und K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North Holland, 1993

[5] A. Defant, M. Junge, Best Constants and Asymptotics of Marcinkiewicz-Zygmund Inequalities, demnächst in Studia Math.

[6] J. Diestel, H. Jarchow und A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995

[7] J. Diestel und J.J. Uhl, Vector Measures, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., 1977

[8] K. Floret, Maß-und Integrationstheorie, Teubner 1981

[9] J. Garcia-Cuerva und J.L. Rubio de Francia, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, North Holland, 1985

[10] J. E. Gilbert, Nikishin-Stein Theory and Factorization with Applications, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. XXXV, Part 2 (1979), S. 233-267

[11] S. Griep, Die Calderón-Zygmund Theorie für singuläre Integraloperatoren mit operatorwertigen Kernen, demnächst vollendete Diplomarbeit, Oldenburg 1997

[12] M. De Guzman, Real Variable Methods in Fourier Analysis, North Holland, 1981

[13] E. Hewitt und K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis I & II, Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen 115, Springer, 1963

[14] J. Hoffmann-Jørgensen, Sums of Independent Banach Space Valued Random Variables, Studia Math. 52 (1974), S. 159-186

[15] O.G. Jørsboe und Leif Mejlbro, The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series, Lecture Notes in Mathematics 911, Springer, 1982

[16] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Springer Verlag, 1960

[17] R. Larsen, An Introduction to the Theory of Multipliers, Die Grundl. der math. Wiss. in Einzeld. 175, Springer, 1971

[18] J. Lindenstrauss und L. Tzafriri, Classical Banach Spaces , Vol. I und II, Ergebn. Math. Grenzgeb. 92 und 97, Springer, 1977 und 1979

[19] L.H. Loomis, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand, 1953

[20] F. Lorenz, Einführung in die Algebra, Teil 1, B.I.-Wissenschaftsverlag, 2. Auflage, 1992

[21] B. Maurey, Theoremes de factorisation pour les operatéurs lineaires a valeurs dans les espaces $L_p(\mu)$, Asterisque 11, Societe Math. de France, 1974

[22] A. Pietsch, Operator Ideals, North Holland, 1980

[23] G. Pisier, Factorization of Operators Through $L_{p,\infty}$ or $L_{p,1}$ and Non-Commutative Generalizations, Math. Ann. 276 (1986), S. 105-136

[24] H.P. Rosenthal, On Subspaces of $L_p(\mu)$, Ann. of Math. 97 (1973), S. 344-373

[25] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, New York, 1962

[26] Séminaire Maurey-Schwartz, Espaces L_p et applications radonifiantes, École Polytechnique Paris, 1972/3

[27] Séminaire Maurey-Schwartz, Espace L_p, applications radonifiantes et geométric des espaces de Banach, École Polytechnique Paris, 1973/4

[28] E.M. Stein, On Limits of Sequences of Operators, Ann. of Math. 74 (1961), S. 140-170

[29] E.M. Stein, Harmonic Analysis, Princeton University Press, 1993

[30] E.M. Stein und G. Weiss, Interpolation of Operators with Change of Measures, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), S. 159-172

[31] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, 1986

[32] B. Virot, Extensions vectorielles d'operatéurs linaires borns sur $L_p(\mu)$, C.R.A.S. Paris 293 (1981), S. 413-415

[33] D. Werner, Funktionalanalysis, Springer, 1995

[34] P. Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Cambridge University Press, 1991

[35] M. Zafran, Multiplier Transformations of Weak Type, Ann. of Math. 101 (1975), S. 34-44

[36] A. Zygmund, Trigonometric Series, vol. I, Cambridge University Press, 1959

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Ingo Bartels