Blatt Scheinklausur Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2007/08

Name: ______________________ Matrikel: ______________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Punkte															

Aufgabe 1 (2 Punkte) Es sind zwei Urnen A und B gegeben, in denen sich rote und weiße Kugeln befinden. In A sind sieben rote und drei weiße Kugeln, in B eine rote und neun weiße. Es wird nun eine beliebige Kugel aus einer beliebigen Urne gezogen. Die Kugel ist rot. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus Urne A stammt.

Aufgabe 2 (1 Punkt) Seien $X_1, \ldots, X_n$ integrierbare Zufallsvariablen. Welche Bedingungen müssen gefordert werden, um $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$ zu sichern?

- ☐ $\{X_1, \ldots, X_n\}$ unabhängig
- ☐ $\{X_1, \ldots, X_n\}$ unabh. und identisch verteilt
- ☐ $\{X_1, \ldots, X_n\}$ identisch verteilt
- ☐ $\{X_1, \ldots, X_n\}$ zentriert

Aufgabe 3 (1 Punkt) Seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $X : \Omega \to I$ eine integrierbare Zufallsvariable. Unter welchen Voraussetzungen an f gilt $E(f(X)) \leq f(E(X))$?

- ☐ f konkav
- ☐ f stetig
- ☐ f beschränkt
- ☐ f konvex

Aufgabe 4 (1 Punkt) Ordnen Sie die folgenden Konvergenzarten der Reihe nach (eine 1 für die stärkste, 3 die schwächste Form).

$\xrightarrow{L^p}$ ☐ $\qquad \xrightarrow{\mathcal{D}}$ ☐ $\qquad \xrightarrow{P}$ ☐

Aufgabe 5 (1 Punkt) Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von unabhängigen $U[0,2]$-verteilten Zufallsvariablen und $\mathcal{F}_n$ die von $\{X_1, ..., X_n\}$ erzeugte σ-Algebra. Welche der folgenden Zufallsvariablen stellen Stoppzeiten bzgl. $\mathcal{F}_n$ dar.

- $\alpha(\omega) := \inf\{l \in \mathbb{N} | X_l \leq \frac{1}{2}\}$ ☐
- $\beta(\omega) := \sup\{l \in \mathbb{N} | X_l \leq \frac{1}{2}\}$ ☐
- $\gamma(\omega) := 1$ ☐
- $\tau(\omega) := \sup\{l \in \mathbb{N} | X_l \geq 1\}$ ☐

Aufgabe 6 (2 Punkte) Bei einem Experiment mit einem (sechseitigen) Würfel möchte man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass man zweimal eine 6 würfelt. Schreiben Sie dazu eine Simluation in `R`, welche n Versuche durchführt. Den zweiten Punkt bekommen Sie, wenn Ihr Programm ohne explizite Schleifen auskommt.

Aufgabe 7 (2 Punkte) Sei $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie die von $\{\{1\}, \{1, 3\}\}$ erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 8 (2 Punkte) Die beiden Zufallsvariablen X und Y seien $N(0, 1)$- bzw. $U[0, 1]$-verteilt. Des Weiteren sei die Funktion $f(x) := x^2$ gegeben. Berechnen Sie $\mathbf{E}(f(X + Y))$.

Aufgabe 9 (1 Punkt) Seien Z eine $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{B}$-messbare und X eine $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{B}$-messbare Zuvallsvariable mit $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Vereinfachen Sie $E(Z|\mathcal{A}_1)$ und $E(ZX|\mathcal{A}_1)$ unter der Annahme, dass die Erwartungswerte von Z,X und ZX existieren.

Aufgabe 10 (2 Punkte) Seien $X_1, X_2, \ldots$ die Ergebnisse von unabhängigen Würfen mit einem fairen Würfel. Zeigen Sie, dass $P[X_n = 6 \text{ für unendlich viele } n\ ] = 1$

Aufgabe 11 (2 Punkte) Eine Polizeistreife überprüft parkende Autos. Von diesen haben erfahrungsgemäß 3% abgefahrene Reifen, 4% haben sonstige Mängel und 1% haben sowohl abgefahrene Reifen als auch sonstige Mängel. Prüfen Sie, ob die Ereignisse R und S unabhängig sind:

R: Ein Auto hat abgefahrene Reifen.

S: Ein Auto hat sonstige Mängel.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto ohne sonstige Mängel abgefahrene Reifen hat?

Aufgabe 12 (2 Punkte) Seien X und Z zwei unabhängige Zufallsvariablen. Leiten Sie die Verteilungsfunktion von $Y := (X, Z)$ her. (Diese soll in Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen von X und Z angegeben werden.)

Aufgabe 13 (2 Punkte) Beweisen Sie folgende Gleichung für die charakteristischen Funktionen unabhängiger Zuvallsvariablen $\{X_1, \dots, X_n\}$ (mit Begründungen der Zwischenschritte!):

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(u) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(u)$$

Aufgabe 14 (2 Punkte) Seien $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E(Y_i) \geq 0$. Zeigen Sie, dass die durch $X_k = \sum_{i=1}^k Y_i$ definierte Folge $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der durch $\mathcal{F}_k = \sigma(Y_1, \dots, Y_k)$ gegebenen Filtration $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Submartingal ist.

Aufgabe 15 (2 Punkte) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer $\pi(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ($\lambda > 0$) und benutzen Sie diese zur Berechnung des Erwartungswertes. (Angabe der Ergebnisse genügt nicht!)

Vorlesung und Übungen: J. Dippon, Institut für Stochastik und Anwendungen, Universität Stuttgart, 0711-685-65384, e-mail dippon@mathematik.uni-stuttgart.de
Übungen: N. Röhrl, Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung, Universität Stuttgart, 0711-685-65311, e-mail roehrl@mathematik.uni-stuttgart.de